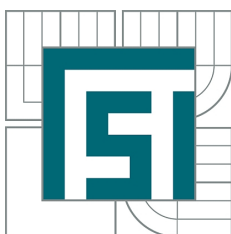


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## PLÁNOVANÝ EXPERIMENT DESIGN OF EXPERIMENT

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. IVETA SABOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. JOSEF BEDNÁŘ, Ph.D.



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Bc. Iveta Sabová

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Plánovaný experiment**

v anglickém jazyce:

### **Design of Experiment**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Statistické zpracování dat z konkrétního technického procesu, Předpokládá se využití testování hypotéz a regresní analýzy s důrazem na plánovaný experiment.

Cíle diplomové práce:

1. Úvod do problematiky plánovaného experimentu (DoE)
2. Popis statistických nástrojů použitých v DoE
3. Popis a vyhodnocení konkrétního plánovaného experimentu

Seznam odborné literatury:

1. Meloun, M., Militký, J.: Kompendium statistického zpracování dat. Academica, Praha, 2002.
2. Montgomery, D.,C.and Runger, G.,C.:Applied Statistics and Probability for Engineers. John Wiley & Sons, 2010.
3. Montgomery, D.,C.: Design and Analysis of Experiments. John Wiley & Sons Inc, 2012
4. Anděl, J.: Základy matematické statistiky. MATFYZPRESS, Praha, 2005.
5. Minitab User's Guide 2: Data Analysis and Quality tools. USA, 2000.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Josef Bednář, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 20.10.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty



## **Abstrakt**

Táto diplomová práca sa zaoberá možnosťou uplatnenia metódy plánovaného experimentu (DoE) na konkrétnych dátach. V prvej kapitole teoretickej časti práce je táto metóda podrobne popísaná. Sú v nej uvedené základné princípy a pokyny pre návrh experimentu. V ďalších dvoch kapitolách je popísaný faktorový návrh experimentu a metóda odozgových plôch, ktorá zahŕňa centrálny kompozitný návrh a Box-Behnkenov návrh experimentu. Nasledujúca kapitola obsahuje praktickú časť, ktorá je zameraná na modelovanie dostrelu loptičky z katapultu pomocou uvedených troch typov návrhov experimentu. V práci sú tieto modely analyzované spoločne s ich rozdielnymi vlastnosťami. Ich porovnanie je vykonané pomocou predikčného a konfidenčného intervalu a pomocou optimalizácie odozvy. Posledná časť diplomovej práce je venovaná celkovému zhodnoteniu.

## **Summary**

This thesis deals with the possibility of applying the method of Design of Experiments (DoE) on specific data. In the first chapter of theoretical part, this method is described in detail. The basic principles and guidelines for the design of the experiment are written there. In the next two chapters, factorial design of the experiment and response surface design are described. The latter one includes a central composite design and Box-Behnken design. The following chapter contains practical part, which focuses on modelling firing range of ball from a catapult using the above three types of experimental design. In this work, the models are analysed together with their different characteristics. Their comparison is made by using prediction and confidence intervals and by response optimizing. The last part of the thesis comprises overall evaluation.

## **Klíčová slova**

Plánovaný experiment (DoE), faktorový návrh, metóda odozgových plôch, centrálny kompozitný návrh, Box-Behnkenov návrh, regresná analýza, MINITAB.

## **Keywords**

Design of Experiment (DoE), factorial design, response surface design, central composite design, Box-Behnken design, regression analysis, MINITAB.

SABOVÁ, I. *Plánovaný experiment*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 83 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Josef Bednář, Ph.D..



Prehlasujem, že predloženú diplomovú prácu *Plánovaný experiment* som vypracovala samostatne pod odborným vedením Ing. Josefa Bednáře, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v Zozname použitých zdrojov a literatúry.

Bc. Iveta Sabová



Chcela by som poďakovať svojmu školiteľovi Ing. Josefu Bednářovi, Ph.D. za jeho odborné vedenie a cenné rady, ktoré mi poskytol pri vypracovaní diplomovej práce. Taktiež za čas a ochotu zodpovedať všetky moje otázky týkajúce sa danej problematiky. Ďalej by som rada poďakovala svojim rodičom za morálnu a finančnú podporu počas celého štúdia.

Bc. Iveta Sabová



# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Úvod</b>  | <b>13</b> |
| <b>2 Plánovanie experimentu</b>  | <b>14</b> |
| 2.1 História . . . . .   | 14        |
| 2.2 Všeobecný/základný model . . . . .                                   | 15        |
| 2.3 Použitie plánovaného experimentu . . . . .                           | 16        |
| 2.4 Základné princípy . . . . .  | 17        |
| 2.4.1 Replikácia . . . . .   | 17        |
| 2.4.2 Blokovanie . . . . .   | 17        |
| 2.4.3 Znáhodnenie . . . . .  | 17        |
| 2.5 Pokyny pre návrh experimentu . . . . .                               | 18        |
| 2.5.1 Definícia alebo popis problému . . . . .                           | 18        |
| 2.5.2 Stanovenie sledovanej premennej . . . . .                          | 19        |
| 2.5.3 Výber faktorov a ich úrovní . . . . .                              | 19        |
| 2.5.4 Výber typu plánovaného experimentu . . . . .                       | 19        |
| 2.5.5 Uskutočnenie experimentu . . . . .                                 | 20        |
| 2.5.6 Analýza dát . . . . .  | 20        |
| 2.5.7 Závery a odporúčania . . . . .                                     | 20        |
| <b>3 Faktorový návrh</b>   | <b>21</b> |
| 3.1 Experimentálny priestor . . . . .                                    | 21        |
| 3.2 Plánovaný experiment s jedným faktorom . . . . .                     | 21        |
| 3.3 Plánovaný experiment s dvomi a viacerými faktormi . . . . .          | 22        |
| 3.4 Princíp úplného $2^k$ faktorového experimentu . . . . .              | 24        |
| 3.4.1 Faktorový experiment pre dva faktory . . . . .                     | 24        |
| 3.4.2 Faktorový experiment pre tri faktory . . . . .                     | 27        |
| 3.5 Pridanie centrálného bodu do $2^k$ faktorového návrhu . . . . .      | 29        |
| 3.6 Princíp čiastočného faktorového experimentu . . . . .                | 30        |
| <b>4 Metóda odozvových plôch</b>   | <b>31</b> |
| 4.1 Centrálny kompozitný návrh . . . . .                                 | 31        |
| 4.2 Box-Behnkenov návrh . . . . .  | 33        |
| <b>5 Realizácia plánovaného experimentu</b>                              | <b>35</b> |
| 5.1 Úplný faktorový experiment s výsledkami merania . . . . .            | 36        |
| 5.2 Centrálny kompozitný návrh s výsledkami merania . . . . .            | 44        |
| 5.3 Box-Behnkenov návrh s výsledkami merania . . . . .                   | 50        |
| 5.4 Porovnanie návrhov experimentu . . . . .                             | 53        |
| 5.4.1 Porovnanie pomocou predikčného a konfidenčného intervalu . . . . . | 53        |
| 5.4.2 Porovnanie pomocou optimalizácie odozvy . . . . .                  | 56        |
| <b>6 Záver</b>   | <b>63</b> |
| <b>Zoznam použitých zdrojov a literatúry</b>                             | <b>65</b> |

|               |    |
|---------------|----|
| Zoznam príloh | 67 |
| Príloha A     | 69 |
| Príloha B     | 79 |
| Príloha C     | 81 |



# 1 Úvod

V praxi je často nutné riešiť úlohy, ktoré vedú k regresnej analýze. Snahou je nájsť funkciu alebo funkcie, ktoré popisujú vzťah medzi jednou alebo viacerými závislými premennými a nezávislými premennými. Metóda plánovaného experimentu, nazývaná tiež Design of Experiment (DoE), môže byť jednou z metód nájdania vhodného regresného modelu.

Experimenty slúžia v dobrých podnikoch a firmách na zlepšovanie procesov prebiehajúcich v súčasnej dobe, alebo na inováciu nových procesov či produktov. Primárnym cieľom každého podniku je maximalizovanie zisku. Preto musí byť experimentovanie čo najefektívnejšie. Hlavný význam má táto metóda predovšetkým v predvýrobnej fáze, čo môže do budúcnosti priniesť najväčšie úspory. Plánované experimenty vo výrobných podnikoch sú vedené ako séria testov, ktorými sú získavané kvantifikovateľné údaje. Priebeh neustáleho zlepšovania je základom pre dobré porozumenie správania jednotlivých procesov, taktiež pre skúmanie variability a jej dopadu na proces. Experimenty sú často používané k získaniu odhadu, alebo k potvrdeniu určitého predpokladu. Výroba teda nemusí byť jedinou oblasťou, kde táto metóda môže nájsť svoje uplatnenie.

Účelom plánovaného experimentu je skúmať vplyv faktorov na výstupnú premennú a stanoviť, ktoré z týchto faktorov, resp. ktorá ich interakcia ovplyvňuje sledovanú závislú premennú a stáva sa teda štatisticky významnou. Pre veľký počet nezávislých premenných boli skonštruované rôzne faktorové návrhy experimentu. Pomáhajú znížiť počet skúmaných faktorov. Použitím týchto faktorových návrhov je možné vybrať vhodný regresný model, nájsť kvalitnejšie odhady neznámych parametrov, ktoré aproximujú funkciu alebo pomocou nich možno celkovo dosiahnuť efektívnejšieho spôsobu získania výsledkov experimentu. Ak sa v modeli vyskytujú kvadratické členy, stáva sa plánovaný experiment zložitejším. Pre riešenie sa používajú metódy odzovových plôch. Základnými typmi použitými v tejto práci sú kompozitné návrhy a Box-Behnkenov návrh.

Cieľom tejto diplomovej práce je priblíženie problematiky plánovaného experimentu, hlavne popis štatistických nástrojov použitých v DoE. Z tohto dôvodu práca obsahuje teoretickú časť (kap. 2-4), kde sú popísané základné pojmy a návrhy, ktoré sú následne aplikované v praktickej časti. Ďalším cieľom je popis a vyhodnotenie realizácie konkrétneho plánovaného experimentu. Praktická časť (kap. 5) je rozdelená na 4 podkapitoly. Prvé tri demonštrujú uplatnenia návrhov experimentov z teoretickej časti na reálnej úlohe, ktorá je venovaná modelovaniu dostrelu loptičky z kataplutu. Po nájdení regresných modelov sú v poslednej časti uvedené ich porovnania.

Aj keď sa môže zdať, že táto úloha vyzerá jednoducho, školsky, budú na nej aplikované všetky popísané štatistické metódy. To isté štatistické spracovávanie dát, ktoré je použité pre modelovanie dostrelu loptičky, je možné taktiež použiť v praxi, napríklad pri návrhu vhodného riešenia pre vývoj.

## 2 Plánovanie experimentu

### 2.1 História

História štatistického plánovaného experimentu je rozdelená do štyroch základných ér.

**Prvá éra**, nazývaná aj **poľnohospodárska éra** sa spája so slávnym anglickým matematikom **Sirom Ronaldom A. Fischerom**. V 20. – 30. rokoch 20. storočia pracoval ako dvorný štatistik neďaleko Londýna, v Rothamsteadskej kráľovskej poľnohospodárskej experimentálnej stanici. Spracovával výsledky 60 ročnej experimentálnej práce. Položil teoretické základy analýzy rozptylu (ANOVA), faktorového návrhu a vyvinul poznatky, ktoré viedli k 3 základným princípom plánovaného experimentu: **znáhodnenie**, **replikácia** a **blokovanie**. Vydal dve knihy, ktoré mali dôležitý vplyv na použitie štatistiky, samozrejme predovšetkým v poľnohospodárstve a biológii.

Aj keď aplikácia plánovaného experimentu v priemyselných zariadeniach začala už v roku 1930, **druhá éra**, nazývaná tiež **priemyselná éra**, sa spája s rokom 1951, kedy **Box** a **Wilson** prišli s vývojom metódy odozvoových plôch (z angl. response surface methodology – RSM). Vedeli rozoznať a následne využiť fakt, že priemyselné experimenty sa fundamentálne odlišujú od poľnohospodárskych v dvoch základných líniách:

- je možné obdržať odozvu rýchlejšie, skoro hneď
- experimentátor vie z malého množstva opakovaní veľmi rýchlo rozoznať, ktoré informácie sú rozhodujúce.

Tieto nové poznatky mohli využiť na plánovanie ďalšieho experimentu. V nasledujúcich 30 rokoch sa RSM a techniky návrhu rozvinuli aj do chemického a procesného priemyslu. Využitie bolo najmä vo výzume a vývoji. Avšak aplikácia plánovaného experimentu v priemyselnej výrobe ešte stále nebola taká rozšírená. Dôvodom mohla byť nedostatočná znalosť štatistických metód, respektíve nedostatočný tréning zamestnancov na základné štatistické metódy a taktiež nebol známy žiaden použiteľný štatistický softvér, ktorý by tejto aplikácii napomáhal.

Stúpajúci záujem Západného priemyslu o zlepšenie kvality okolo roku 1970 uviedol **tretiu éru** plánovaného experimentu. Bola to práca **Genichiho Taguchiho**, ktorá mala významný dopad na neuveriteľný nárast záujmu a použitie plánovaného experimentu. Neskôr ale vyvolala aj vlnu diskusii a stala sa **kontroverznou**. Táto kontroverzia priniesla najmenej tri pozitívne výsledky. Ako prvým bolo, že plánovaný experiment sa rozšíril viac do jednotlivých častí priemyslu, zahŕňajúc automobilovú a leteckú výrobu, elektroniku a polovodiče a do mnohých ďalších priemyselných odvetví, ktoré dovtedy používali veľmi málo techniky pre výrobu.

Druhým pozitívnym výsledkom bolo, že nastala **štvrtá éra** štatistického návrhu experimentu. Tá zahŕňala obnovený záujem o plánovaný experiment či už išlo o výzkumníkov, alebo praktikov. Priniesla tiež rozvoj nových prístupov k plánovaniu v priemyselnom svete, taktiež použitie Taguchiho technických metód v praxi. A na záver, tretím pozitívnym výsledkom bolo zavedenie štatistického plánovania experimentu do učebných osnov mnohých celosvetových univerzít.

Úspech použitia dobre navrhnutého plánovaného experimentu vo vede a inžinierstve je kľúčom k budúcej priemyselnej konkurencieschopnosti. [8]

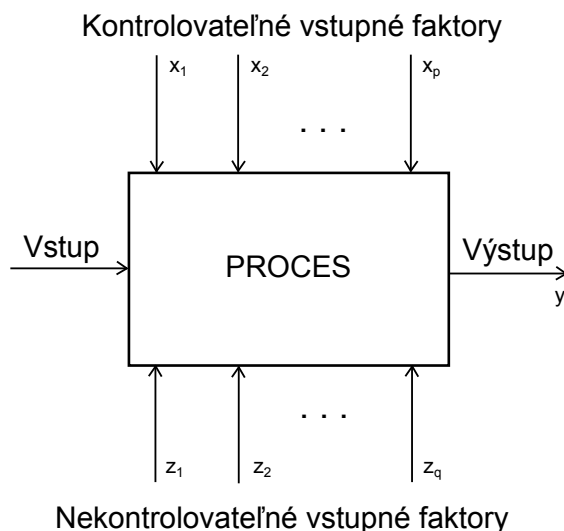
## 2.2 Všeobecný/základný model

Experimenty sú vykonávané v každej oblasti výskumu, za účelom nájdania nových informácií týkajúcich sa konkrétneho procesu alebo systému. Experimentovať sa začína spravidla vtedy, kedy nie je k dispozícii dostatočné množstvo informácií, aby sa pomocou jedného experimentu dalo nájsť optimálne nastavenie procesu, alebo najvhodnejší návrh výrobku. Pre získanie viacerých informácií o procese a pre lepšie priblíženie sa k optimu sa preto počíta s radou drobnejších experimentov.

Formálne je možné definovať **plánovaný experiment** ako skúšku alebo sériu skúšok, v ktorých sa cieľavedome vykonáva zmena vstupných faktorov procesu, aby bolo možné pozorovať a identifikovať odpovedajúce zmeny výstupnej premennej - tzv. odozvy. [8]

**Proces** alebo systém je reprezentovaný modelom na obrázku 2.1. Je možné si predstaviť proces ako kombináciu strojov, metód, ľudí, a ďalších zdrojov, ktoré menia vstupné dáta na výstupné dáta s jednou alebo viacerými odozvami. Premenné  $x_1, x_2, \dots, x_p$  sú kontrolovateľné, možno ich v procese meniť. Na druhej strane premenné  $z_1, z_2, \dots, z_q$  sú nekontrolovateľné, nemožno ich meniť, ale je možné ich sledovať. Ciele experimentu môžu byť: [8]

1. Určenie premenných, ktoré majú najväčší vplyv na výstup  $y$ .
2. Určenie nastavenia premenných  $x$ , ktoré ovplyvňujú proces tak, aby odozva  $y$  bola vždy čo najbližšie k požadovanej nominálnej hodnote.
3. Určenie nastavenia premenných  $x$  tak, aby variabilita v odozve  $y$  bola čo najmenšia.
4. Určenie nastavenia premenných  $x$ , ktoré ovplyvňujú proces tak, aby ich vplyv na nekontrolovateľné premenné  $z_1, z_2, \dots, z_q$  bol minimalizovaný.



Obrázok 2.1: Základný model procesu alebo systému

## 2.3 Použitie plánovaného experimentu

Metódy plánovania experimentu si našli široké uplatnenie v mnohých disciplínach. V podstate je možné vnímať experiment ako časť vedeckého procesu a ako jednu z ciest, ktorá umožňuje zistiť, ako systém alebo proces funguje. Vykonávaním experimentov sú generované dáta z procesu a potom sú využívané informácie z experimentov pre stanovenie nových predpokladov, ktoré vedú k novým plánovaným experimentom.

Plánovaný experiment je dôležitým nástrojom v inžinierskom svete na zvýšenie výkonnosti podnikových resp. výrobných procesov. Taktiež má rozsiahlu aplikáciu vo vývoji nových procesov. Využitie plánovaného experimentu v počiatočných fázach procesu vývoja môže mať pozitívne dopady, ktoré môžu byť napríklad:

- Zlepšenie výnosov procesu
- Redukcia variability a bližšia zhoda s nominálnymi alebo cieľovými požiadavkami
- Zníženie doby vývoja
- Redukcia celkových nákladov
- Zníženie počtu zmätkov a počtu opätovných skúšok
- Zníženie objemu nezužitkovaného materiálu
- Porozumenie vzťahov medzi vstupnými a výstupnými hodnotami kľúčových procesov.

Plánovaný experiment má tiež významnú úlohu pri návrhu nových produktov, a aj pri zlepšovaní už existujúcich produktov.

- Ohodnotenie a porovnanie základných konfigurácií návrhu
- Ohodnotenie materiálových alternatív
- Výber parametrov návrhu tak, že produkt bude pracovať dobre za každých podmienok, tým sa stane robustným, stabilným, neovplyviteľným žiadnymi nežiaducimi parametrami
- Stanovenie kľúčových parametrov návrhu, ktoré majú vplyv na výkonnosť produktu.

Použitie plánovaného experimentu v týchto oblastiach môže mať za následok zjednodušenie výroby produktov, zvýšenie spoľahlivosti produktu, zníženie ceny produktu a zníženie času potrebného na vývoj. [8][2]

## 2.4 Základné princípy

Tromi základnými princípmi plánovaného experimentu sú:

- replikácia
- blokovanie
- znáhodnenie

Prvé dva princípy napomáhajú k zlepšeniu presnosti v experimente, posledný je používaný na zníženie skreslenia. Uvedené princípy sú rozoberané v jednotlivých podkapitolách. [4]

### 2.4.1 Replikácia

**Replikáciou** sa rozumie opakovanie základného experimentu, alebo jeho časti, na základe viac ako jednej podmienky. Má dve základné vlastnosti. Prvou vlastnosťou replikácie je, že umožňuje experimentátorovi získať približný odhad chyby experimentu. Tento odhad chyby je základnou jednotkou merania, ktorá určí, či pozorované rozdiely v dátach sú skutočne *statisticky* odlišné. Druhou vlastnosťou je, že je možné získať precíznejší odhad interakcie medzi rôznymi faktormi. Ak je materiál, ktorý je používaný na jednotlivé skúšky nákladný, potom sa môže použitie replikácie značne predražiť. Pri použití replikácii v reálnych experimentoch je nutné brať ohľad na cenu a, samozrejme, aj na čas. [8][2]

Je ale potrebné uvedomiť si, že existuje rozdiel medzi replikáciou a opakovaným meraním. Tieto dva pojmy bývajú často stotožňované, ale nejedná sa o ten istý pojem.

### 2.4.2 Blokovanie

**Blokovanie**, teda rozdelenie experimentu do blokov, je metóda, ktorá sa používa na redukovanie alebo odstraňovanie variability faktorom, ktorý nie je možné znáhodniť. Variabilita je prenášaná z nežiaducich zdrojov. To sú zdroje, ktoré síce majú vplyv na odozvu experimentu, ale nie sú priamym objektom záujmu. Všeobecne platí, že blok je súbor relatívne homogénnych experimentálnych podmienok. Blokmi môžu byť používané materiály, rôzne subjekty, rozdielni dodávatelia a podobne. V praxi to prebieha tak, že sa jednotlivý stupeň nežiaduceho zdroja vezme ako jeden blok. Blok je sada alebo postupnosť pozorovaní, ktoré boli vykonané za rovnakých podmienok, napríklad počas rovnakej zmeny, alebo v rovnaký deň. Variabilita medzi blokmi je z experimentálnych chýb odstránená, čo vedie k zvýšeniu presnosti experimentu. [8][2]

### 2.4.3 Znáhodnenie

**Znáhodnenie** je základným kameňom použitia štatistických metód v plánovanom experimente. Ak navrhujeme plánovaný experiment v priemysle, výsledok experimentu ovplyvňujú faktory ako napríklad chyby operátora, kolísanie teploty a vlhkosti, premenlivosť surového materiálu. Tieto faktory môžu negatívne ovplyvniť výsledok plánovaného experimentu. Ich kontrola je väčšinou drahá a obtiažna. Znáhodnenie je jednou z metód, ktorá umožňuje znížiť dopad týchto faktorov. [2]

Znáhodnením je myslené poradie, v ktorom sa majú uskutočniť jednotlivé kroky alebo štúdie experimentu. Nie sú teda vykonávané postupne, systematicky.

Počítačové programy majú široké využitie pre pomoc s výberom a výstavbou plánovaného experimentu. Programy zvyčajne vykonávajú jednotlivé kroky plánovaného experimentu v náhodnom poradí. Toto náhodné poradie je realizované použitím náhodného číselného generátoru. [8]

Pred použitím znáhodnenia by mali byť položené nasledovné otázky: [2]

- Aká je cena, ktorá sa spája so zmenou úrovni faktorov?
- Začlenili sa nejaké rušivé faktory do návrhu experimentu?
- Ako nastaviť časový odstup medzi skúškami?
- Koľko faktorov experimentu je drahých alebo náročných na kontrolu?

Tieto tri základné princípy plánovaného experimentu, replikácia, blokovanie a znáhodnenie sú súčasťou každého experimentu.

## 2.5 Pokyny pre návrh experimentu

Pri použití štatistického prístupu v navrhovaní a v analýze experimentu je nutné, aby všetky strany, ktoré sa podieľajú na experimente, mali vopred určenú a jasnú predstavu o tom, čo má byť skúmané, ako majú byť zhromažďované údaje, a aby aspoň jednoducho chápali, ako majú byť tieto údaje analyzované. V tabuľke 2.1 je uvedený prehľad odporúčaného procesu, ktorý by mal byť súčasťou každého plánovaného experimentu. Rozbor jednotlivých krokov je podľa [8][2] uvedený pod tabuľkou.

Tabuľka 2.1:

- 
1. Definícia alebo popis problému
  2. Stanovenie sledovanej premennej
  3. Výber faktorov a ich úrovni
  4. Výber typu plánovaného experimentu
  5. Uskutočnenie experimentu
  6. Analýza dát
  7. Závery a odporúčania
- 

### 2.5.1 Definícia alebo popis problému

Môže sa zdať, že ide o úplne zrejmú vec. V praxi ale nie je až také jednoduché uviesť si, či vôbec existuje nejaký problém, ktorý vyžaduje použitie plánovaného experimentu. Je teda potrebné tento problém určiť a tiež všetky nápady, ktoré by mohli pomôcť definovať základné premenné experimentu. Je preto nutné získať návrhy od všetkých zúčastnených strán, jednotlivých oddelení: inžinieri, výroba, marketing, manažment, oddelenie kvality, zákazník. Preto je odporúčaný tímový prístup pre návrh experimentu.

Jasný a stručný popis problému môže vytvoriť lepšie pochopenie toho, čo je potrebné realizovať. Popis by mal obsahovať konkrétne a merateľné ciele, ktoré môžu priniesť praktickú hodnotu, resp. úžitok pre spoločnosť alebo podnik. Medzi niektoré problémy vo výrobe, ktoré je možno riešiť pomocou experimentálneho prístupu patrí napríklad:

- Vývoj nových produktov, zlepšovanie existujúcich procesov alebo produktov.
- Zlepšenie výkonnosti procesov alebo produktov vzhľadom k potrebám a požiadavkam zákazníkov.

Po tom, čo sú vybrané ciele experimentu, môže byť zostavený expertný tím. Tím sa môže skladať zo špecialistu na plánovaný experiment, procesného inžiniera, inžiniera kvality a hlavného zástupcu z vedenia.

### 2.5.2 Stanovenie sledovanej premennej

Výber vhodnej odozvy je rozhodujúcim faktorom pre úspech akéhokoľvek plánovaného experimentu. Pri výbere by si mal byť experimentátor istý tým, že ide skutočne o premennú, ktorá poskytuje užitočné informácie o analyzovanom procese. Odozvou môže byť *premenná* alebo *atribút*. Ako príklad premennej môže byť sila, dĺžka, šírka, viskozita. Atribút napríklad vyhovel/nevyhovel, áno/nie a podobne. Je dôležité poznamenať, že variabilné charakteristiky (premenné) vyžadujú menej vzoriek než vyžadujú atribúty na dosiahnutie rovnakej úrovne štatistickej významnosti.

Experimentátori by mali mať definované priority pred vykonaním experimentu, aby bolo jasné, čo bude merané, kde bude meranie vykonávané, a kto bude meranie vykonávať. Definícia systému merania je dôležitá z hľadiska variability systému merania, operátora a meraného dielu. Je vhodné ubezpečiť sa, že merací systém je stabilný, robustný a odolný voči zmenám životného prostredia.

### 2.5.3 Výber faktorov a ich úrovní

Pre identifikáciu potenciálnych premenných procesu sa využívajú technické znalosti procesu, znalosti získané na základe brainstormingu, historické údaje a znalosti analýzy príčin a následkov. Jedná sa o veľmi dôležitý krok postupu experimentálneho designu. Musia sa vybrať faktory, ktoré sa budú v procese meniť. Vyberajú sa hlavne dôležité faktory, keďže každý faktor rádovo zväčšuje experiment. Na druhej strane, ak sú vynechané nejaké dôležité faktory z experimentu, potom výsledky nebudú presné a tým pádom nie je možné použiť experiment pre zlepšenie. Je vhodné vykonať *skrínigový experiment* v prvej fáze akéhokoľvek experimentálneho skúmania a identifikovať najdôležitejšie parametre alebo procesné premenné, a oddeliť ich od tých menej dôležitých.

### 2.5.4 Výber typu plánovaného experimentu

Ak je správne vykonané pred-experimentálne plánovanie, tento krok je relatívne jednoduchý. Výber typu plánovaného experimentu zahŕňa počet faktorov, počet replikácií, výber vhodného poradia pre experimentálne pokusy (tzn. či uvažujeme znáhodnenie) a predpisuje nastavenie hodnôt faktorov pre jednotlivé testy experimentu. Taktiež určuje, či je potrebné brať do úvahy aj blokovanie, alebo nie, a či sú ešte zahrnuté nejaké obmedzenia.

Existuje množstvo interaktívnych štatistických softvérov, ktoré sa používajú pre túto časť experimentu. Experimentátor zadáva informácie o počte faktorov, ich úrovni a rozsah týchto úrovní. Programy dokážu navrhnúť typ plánovaného experimentu, poprípade odporučiť, či je vhodné použiť čiastočný návrh experimentu. Po tom, čo sú zadané počiatočné informácie a je vybraný typ experimentu, program vygeneruje pracovné pole. Sú v ňom nastavenia jednotlivých faktorov a úrovní, podľa ktorých experimentátor ďalej postupuje pri vykonávaní experimentu.

### **2.5.5 Uskutočnenie experimentu**

Počas priebehu experimentu je veľmi dôležité monitorovať proces, aby bolo zabezpečené, že všetko prebieha podľa plánu. Ak sa vyskytnú chyby v experimentálnom postupe, v tejto fáze to má za následok porušenie platnosti experimentu. Dobré pred-experimentálne plánovanie je preto zásadným krokom pre úspech. Jednoducho sa podcenia logistické aspekty a aspekty plánovania v priebehu plánovaného experimentu.

Coleman a Montgomery navrhli, že pred vykonaním experimentu by bolo dobré uskutočniť niekoľko skúšobných pokusov. Tieto pokusy poskytujú informácie o konzistencii experimentálneho materiálu, skontrolujú systém merania, určia hrubú predstavu o experimentálnej chybe. Ak je to potrebné, tento krok tiež poskytuje príležitosť upraviť rozhodnutia uskutočnené v prvých 4 fázach experimentu.

### **2.5.6 Analýza dát**

Pre analyzovanie nameraných dát sa používajú štatistické metódy. Výsledky a závery sú potom objektívne. Existuje mnoho softvérov, ktoré pomáhajú s analýzou dát a mnoho programov, ako bolo spomenuté v podkapitole 2.5.4 pre výber typu plánovaného experimentu. Poskytujú priame prepojenie so štatistickou analýzou. Zistíme, že jednoduché grafické metódy hrajú dôležitú úlohu v analýze a interpretácii dát. Mnoho otázok, na ktoré chce experimentátor poznať odpoveď sa dajú riešiť pomocou procedúr, ktorými môžu byť testovanie štatistickej hypotézy, určenie predikčného alebo konfidenčného intervalu a podobne. Na prezentáciu výsledkov je vhodné použiť tzv. empirický model, ktorý umožňuje aj ich názorné zobrazenie. Ide o regresnú funkciu získanú z dát, ktorá vyjadruje závislosť medzi odozvou a dôležitými faktormi návrhu.

### **2.5.7 Závery a odporúčania**

Keď sú dáta rozanalyzované, experimentátor má za úlohu načrtnúť praktické závery o výsledkoch experimentu a odporučiť ďalší postup. Grafické metódy sú v tejto fáze často potrebné, špeciálne pri prezentácii výsledkov ďalším zúčastneným.



## 3 Faktorový návrh

Faktorové návrhy majú široké použitie v praxi. Sú základom pre experimenty, lebo sú schopné skúmať niekoľko faktorov naraz. Kapitola 3.2 sa zaoberá formálnym zápisom experimentu s jedným sledovaným faktorom, kapitola 3.3 popisuje dva faktory a ich hlavný dopad na odozvu. Samozrejým je zovšeobecnenie metódy na ľubovoľný počet faktorov.

V kapitolách 3.4.1 a 3.4.2 sú konkrétne popísané úplné faktorové experimenty pre dva a tri faktory. Skúmanie väčšieho množstva faktorov v rovnakom návrhu experimentu automaticky vyžaduje použitie čiastočného faktorového experimentu, ktorý je priblížený v kapitole 3.6.

### 3.1 Experimentálny priestor

Plánovanie, realizáciu aj vyhodnotenie experimentu je možné interpretovať ako skúmanie neznámeho experimentálneho priestoru. Predstaviť si priestor, ktorý má iba jeden jediný rozmer je jednoduché. Otázka môže znieť: „*Pri akej hodnote bude dosiahnutý požadovaný, respektíve najpriaznivejší výsledok?*“ Toto je experiment s jedným faktorom. Dal by sa znázorniť pomocou dvoch alebo viacerých bodov rozložených na priamke. Každý bod znamená nastavenie faktoru na inú hodnotu a z každého bodu je získaná jedna alebo viac odoziev.

Zložitejší experiment má dva faktory. Experimentálny priestor je tentokrát možné znázorniť ako plochu. Experiment, ktorý má štyri kroky je štvorec. V každom rohu štvorca je jedna kombinácia nastavenia faktorov a opäť je možné získať jednu alebo viac opakovaných odoziev.

Existujú prípady, kedy bude cieľom skúmania vplyv viacerých faktorov na daný proces. Pre takéto experimenty bude používaný trojrozmerný priestor, kde môže byť experimentálnym priestorom kocka, alebo viacrozmerný priestor, ktorý už nie je jednoduché znázorniť, dá sa ale pochopiť. Na jednej strane sa za každý krok experimentu musí zaplatiť určitá cena, ale na druhej strane každý krok experimentu prináša nejakú dôležitú informáciu. [6]

### 3.2 Plánovaný experiment s jedným faktorom

Vyšetruje sa v ňom jediný faktor z hľadiska jeho vplyvu na odozvu, ak existuje. Nazýva sa tiež **jednofaktorový experiment**. [3]

Experiment by sa dal interpretovať tak, že existuje  $a$  rôznych úrovní jedného faktoru, ktoré majú byť porovnávané. Tieto úrovne faktoru môžu byť kvantitatívne aj kvalitatívne. Pri plánovanom experimente s jedným sledovaným faktorom postačí jedna replikácia, preto je potrebné každú úroveň faktoru zmerať aspoň jedenkrát. Analýza dát z jednofaktorového experimentu sa vykonáva napríklad pomocou priebehového diagramu so stanovenými úrovňami faktoru. Tvoria ho dátové body, ktoré sú vykreslené v chronologickom poradí. Priebehové diagramy sa taktiež používajú na zistenie variability procesu a monitorovanie výkonnosti procesu.

## Modely pre dáta

Pre popis pozorovaní z daného experimentu je vhodné použiť nejaký model. Všeobecne používaný matematický model pre plánovaný experiment s jedným faktorom je: [8]

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.1)$$

kde

- $y_{ij}$  je  $ij$ -ta odozva (alebo  $j$ -te pozorovanie  $i$ -tej odozvy)
- $\mu_i$  je stredná odozva pri  $i$ -tej úrovni faktoru
- $\varepsilon_{ij}$  je náhodná veličina, ktorá zahŕňa všetky ostatné vplyvy a zdroje rozptylu.

Alternatívou vyššie uvedeného modelu je: [8]

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.2)$$

$$\mu_i = \mu + \tau_i \quad (3.3)$$

kde

- $y_{ij}$  je  $ij$ -ta odozva (alebo  $j$ -te pozorovanie  $i$ -tej odozvy)
- $\mu$  je celková stredná odozva
- $\tau_i$  je prírastkový vplyv spôsobený  $i$ -tou úrovňou faktoru
- $\varepsilon_{ij}$  je náhodná veličina, ktorá zahŕňa všetky ostatné vplyvy a zdroje rozptylu.

Oba modely (3.1) a (3.2) sú **lineárne štatistické modely**. To znamená, že odozva  $y_{ij}$  je lineárnou funkciou parametrov modelu.

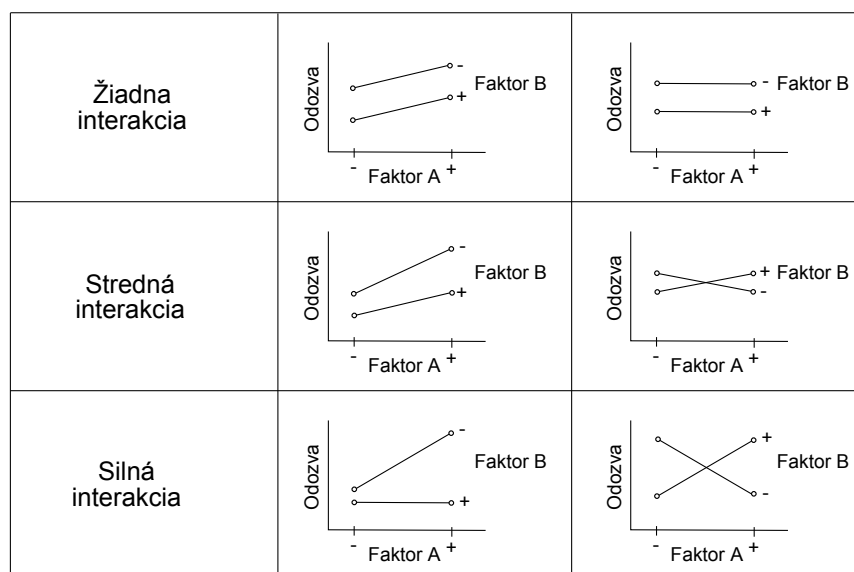
Rovnica (3.2) sa taktiež nazýva aj **jednofaktorový model analýzy rozptylu**, pretože je vyšetřovaný iba jeden faktor. Cieľom je testovať príslušné hypotézy o stredných hodnotách jednotlivých pozorovaní a odhadnúť ich. Pri testovaní hypotéz sa predpokladá, že chyby modelu sú nezávislé náhodné premenné a majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou  $\mu$  a rozptylom  $\sigma^2$ . Ďalej je požadované, aby bol experiment realizovaný v náhodnom poradí tak, že prostredie, v ktorom sú jednotlivé pozorovania vykonávané, je čo najjednoduchšie. Predpokladom je **kompletné znáhodnenie experimentu**. [8]

## 3.3 Plánovaný experiment s dvomi a viacerými faktormi

Štúdium jedného faktoru v experimente má isté nevýhody. Okrem toho, že analýza jedného faktoru je neefektívna, máva tento sledovaný faktor zvyčajne interakcie s inými faktormi. *Interakciou* rozumieme vplyv, pre ktorý zjavné ovplyvnenie odozvy jedným faktorom závisí na jednom ďalšom faktore alebo na viacerých ďalších faktoroch. [3] Jednotlivé typy interakcií sú uvedené na obrázku 3.1.

Plánovaný experiment s dvomi faktormi je nazývaný tiež **dvojfaktorový experiment**. Vyšetřujú sa v ňom súčasne dva rozdielne faktory z hľadiska možných vplyvov na odozvu.

Ak sa spoločne prešetruje  $k$ , kde  $k \geq 2$ , rozdielnych faktorov z hľadiska možných vplyvov na odozvu, ide o **k-faktorový experiment**. [8]



Obrázok 3.1: Interakcie faktorov

### Formálny model plánovaného experimentu s dvomi faktormi

Model pozostáva z troch častí. Prvá časť je tvorená odozvou  $y_{ij}$ , ktorá je modelovaná. Druhá časť je systematická časť modelu a zahŕňa predikčné premenné, tretia časť je náhodná alebo chybová časť modelu. Môže byť značne komplikovaná. Súčasťou chybového člena môžu byť disperzné vplyvy, čím sa berie do úvahy variabilita odozvy pri jej vyšších skutočných hodnotách. [3]

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

kde

$y_{ij}$  je celková odozva, ak faktor  $A$  je na úrovni  $i$  a faktor  $B$  je na úrovni  $j$

$\mu$  je celková stredná odozva

$\alpha_i$  je prírastkový vplyv faktoru  $A$  na úrovni  $i$

$\beta_j$  je prírastkový vplyv faktoru  $B$  na úrovni  $j$

$\varepsilon_{ij}$  je chybový člen

### Všeobecne používaný model plánovaného experimentu s dvomi faktormi

$$y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

kde

$y_{ijk}$  je odozva pri  $k$ -tej replikácii

$\alpha_i$  je nastavenie prostredníctvom faktoru 1

$\beta_j$  je nastavenie prostredníctvom faktoru 2

$\tau_{ij}$  je nastavenie prostredníctvom interakcie faktorov 1 a 2

$\varepsilon_{ijk}$  je chybový člen

### 3.4 Princíp úplného $2^k$ faktorového experimentu

Najdôležitejším, a aj najviac využívaným typom je faktorový návrh, ktorý obsahuje  $k$  faktorov, každý na dvoch úrovniach. Tieto úrovne môžu byť *kvantitatívne*, napríklad dve hodnoty teploty, tlaku, alebo času; alebo môžu byť *kvalitatívne*, ako napríklad dva rôzne typy strojov, dvaja rôzni operátori, poprípade ich môžeme označiť ako „horný“ a „dolný“ faktor alebo uvažovať prítomnosť, resp. absenciu faktoru. Celková replikácia tohto návrhu vyžaduje  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^k$  pozorovaní a nazýva sa  **$2^k$ -faktorový návrh experimentu**.

Počas priebehu experimentu by mali byť splnené uvedené predpoklady: [4]

- faktory sú vopred fixne stanovené
- návrhy sú kompletne znáhodnené
- sú splnené predpoklady normality

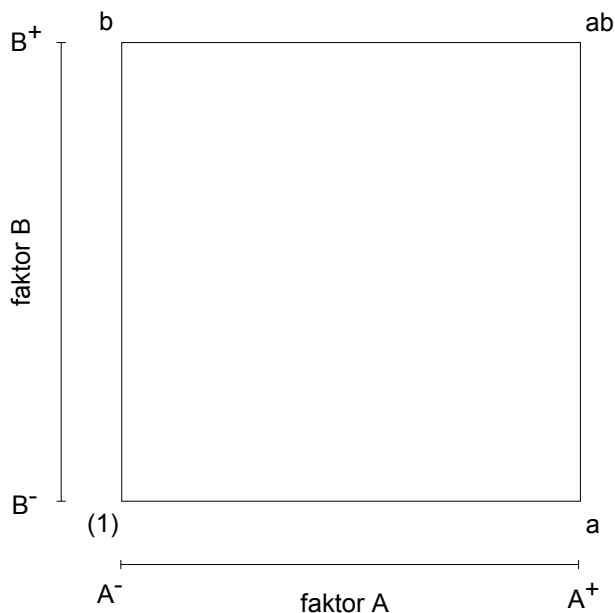
#### 3.4.1 Faktorový experiment pre dva faktory

Prvým faktorovým experimentom zo série  $2^k$  je experiment  $2^2$ . Nech sú označené faktory písmenami  $A$  a  $B$ , každý na dvoch úrovniach. Interakciu faktorov je označená  $AB$ . Hodnoty faktoru  $A$  sa menia od dolnej úrovne  $A^-$  po hornú úroveň  $A^+$ . Obdobne hodnoty faktoru  $B$  sa menia od dolnej úrovne  $B^-$  po hornú úroveň  $B^+$ . Merania sa vykonávajú pre všetky štyri kombinácie úrovní oboch faktorov. Počet kombinácií je daný vzťahom:

$$2^k = 2^2 = 4.$$

#### Geometrické znázornenie

Jednotlivé kombinácie sú zobrazené graficky na obrázku 3.2.



Obrázok 3.2:  $2^k$  faktorový experiment s dvomi faktormi

Tieto kombinácie sa zvyčajne značia malými písmenami. Teda (1) reprezentuje kombináciu oboch faktorov na dolnej úrovni,  $a$  reprezentuje vzájomnú kombináciu  $A^+$  a  $B^-$ ,  $b$  reprezentuje vzájomnú kombináciu  $A^-$  a  $B^+$ , a nakoniec  $ab$  reprezentuje kombináciu oboch faktorov na hornej úrovni. Značenie sa používa všeobecne pre všetky  $2^k$  experimenty.

### Tabuľka návrhu

Nech je zavedená symbolika značenia dolnej úrovne ako  $-1$  a hornej úrovne ako  $1$ . Priemerom dolnej a hornej úrovne je stredná úroveň, ktorá je ďalej v texte označovaná  $0$ .

Tabuľka 3.1:  $2^2$  faktorový experiment

| Poradové číslo | Faktor A | Faktor B | Odozva | Značenie |
|----------------|----------|----------|--------|----------|
| 1              | -1       | -1       | $y_1$  | (1)      |
| 2              | 1        | -1       | $y_2$  | $a$      |
| 3              | -1       | 1        | $y_3$  | $b$      |
| 4              | 1        | 1        | $y_4$  | $ab$     |

Po vykonaní počiatočných krokov je vhodné zodpovedať nasledujúcu otázku: „Čo je momentálne hlavným cieľom skríningových experimentov?“ Cieľom je rozhodnúť, ktoré z týchto faktorov sú dôležité. Po tom, ako sú dôležité faktory určené, naplánuje sa sekundárny experiment. Jeho cieľom je stanoviť, aké nastavenia úrovni faktorov dávajú optimálnu odozvu. Skríningový  $2^k$  experiment je všeobecne prvým stupňom tzv. experimentálnej sekvencie. V druhej fáze sa experimentátor môže venovať odozvovým plochám, ktoré sú popísané v kapitole 4. Ďalšou možnosťou pokusu je nájsť optimálnu úroveň nastavenia dôležitých faktorov.

### Hlavný efekt faktoru

Hlavný efekt alebo hlavný vplyv faktoru je ovplyvnenie strednej hodnoty odozvy jedným faktorom. [3]

Efekt jednotlivých faktorov na výstup sa spočíta ako rozdiel priemerov odoziev pre faktor nastavený na hornú úroveň  $\bar{y}_{A+}$  a pre faktor nastavený na dolnú úroveň  $\bar{y}_{A-}$ . Ak je uvažovaných  $n$  replikácií, teda opakovaní, berú sa hodnoty v bodoch (1),  $a$ ,  $b$ ,  $ab$  ako súčet týchto  $n$  replikácií.

$$\text{efekt faktoru } A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{1}{2n} [ab + a - b - (1)]$$

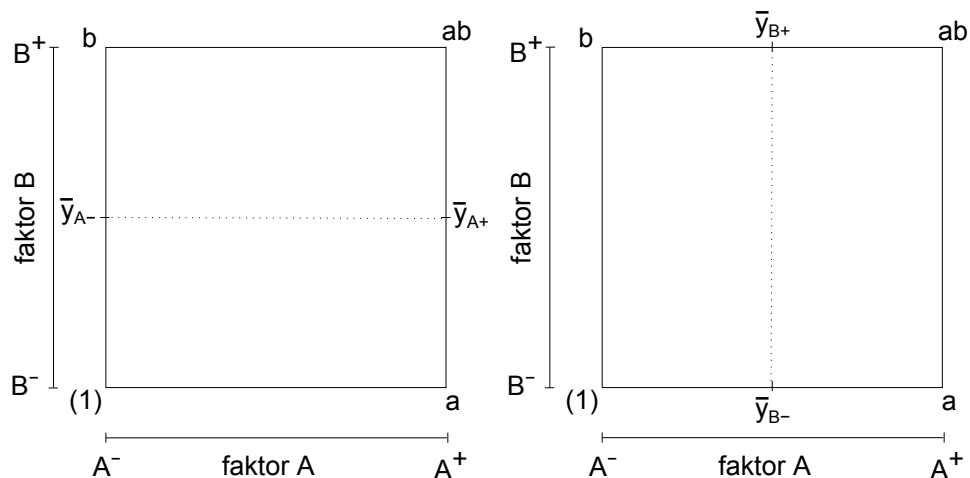
Analogicky sa vypočíta aj hodnotu efektu faktoru  $B$ .

$$\text{efekt faktoru } B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{1}{2n} [ab + b - a - (1)]$$

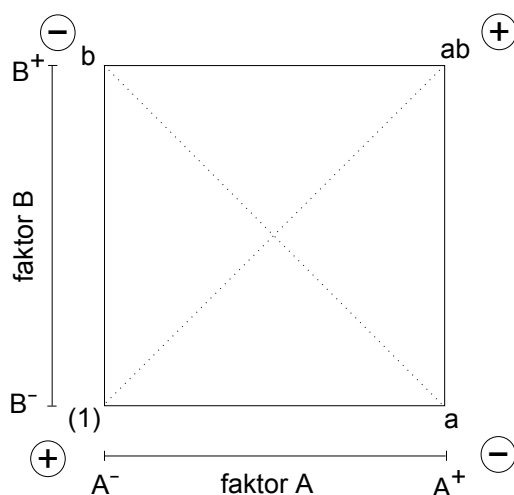
### Efekt interakcie faktorov

Nakoniec je definovaný efekt interakcie  $AB$  ako priemer rozdielu medzi efektom  $A$  na hornej úrovni  $B$  a efektom  $A$  na dolnej úrovni  $B$ .

$$\text{efekt interakcie } AB = \frac{1}{2n} [ab + (1) - a - b]$$



Obrázok 3.3: Geometrické znázornenie hlavného efektu faktoru A (vľavo) a hlavného efektu faktoru B (vpravo)



Obrázok 3.4: Geometrické znázornenie interakcie faktorov A a B

### Regresný model faktorového experimentu s dvomi faktormi

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

kde

$y$  je hodnota odozvy

$\beta_0$  je priemerná hodnota odozvy

$\beta_1, \beta_2$  sú regresné koeficienty

$\beta_{12}$  je regresný koeficient pre interakciu medzi parametrami

$\varepsilon$  je náhodná chyba

$x_1$  je premenná, ktorá reprezentuje faktor A

$x_2$  je premenná, ktorá reprezentuje faktor B

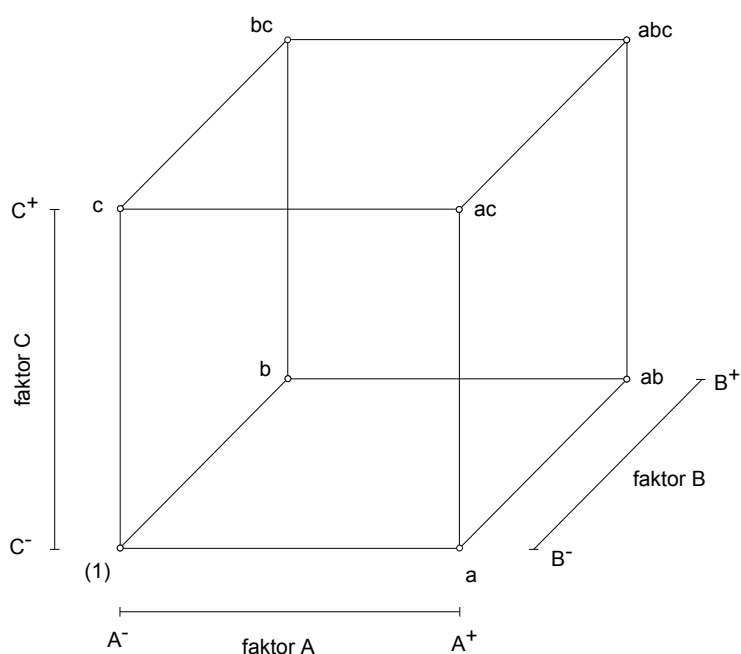
### 3.4.2 Faktorový experiment pre tri faktory

Nech sú označené sledované faktory  $A, B$  a  $C$ , každé na dvoch úrovniach. Daný návrh sa nazýva  $2^3$  faktorový návrh experimentu a existuje  $2^3 = 8$  možných kombinácií nastavenia. Hodnoty jednotlivých faktorov sa rovnako ako v predchádzajúcom prípade menia od dolnej úrovne po hornú a sú značené horným indexom  $-$  a  $+$ .

#### Geometrické znázornenie

Rozšírením kombinácií, ktoré sú popísané v kapitole 3.4.1, sú získané značenia  $(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc$ . Tieto symboly reprezentujú celkovú sumu všetkých  $n$  replikácií, ktoré boli namerané v príslušných bodoch.

Jednotlivé kombinácie sú zobrazené graficky na obrázku 3.5.



Obrázok 3.5:  $2^k$  faktorový experiment s tromi faktormi

#### Tabuľka návrhu

Tabuľka 3.2:  $2^3$  faktorový experiment

| Poradové číslo | Úroveň A | Úroveň B | Úroveň C | Odozva | Značenie |
|----------------|----------|----------|----------|--------|----------|
| 1              | -1       | -1       | -1       | $y_1$  | $(1)$    |
| 2              | 1        | -1       | -1       | $y_2$  | $a$      |
| 3              | -1       | 1        | -1       | $y_3$  | $b$      |
| 4              | 1        | 1        | -1       | $y_4$  | $ab$     |
| 5              | -1       | -1       | 1        | $y_5$  | $c$      |
| 6              | 1        | -1       | 1        | $y_6$  | $ac$     |
| 7              | -1       | 1        | 1        | $y_7$  | $bc$     |
| 8              | 1        | 1        | 1        | $y_8$  | $abc$    |

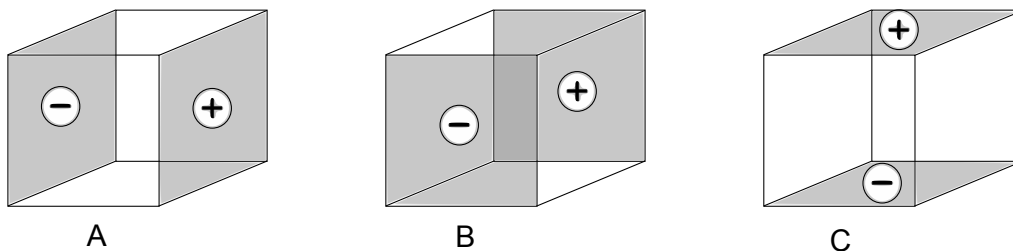
### Hlavný efekt faktoru

Ako už bolo uvedené, efekt jednotlivých faktorov na výstup sa spočíta ako rozdiel priemerov odoziev pre faktor nastavený na hornú úroveň a pre faktor nastavený na dolnú úroveň.

$$\text{efekt faktoru } A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$

$$\text{efekt faktoru } B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{1}{4n} [b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac]$$

$$\text{efekt faktoru } C = \bar{y}_{C+} - \bar{y}_{C-} = \frac{1}{4n} [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab]$$



Obrázok 3.6: Geometrické znázornenie hlavných efektov faktorov A, B, C

### Efekt interakcie faktorov

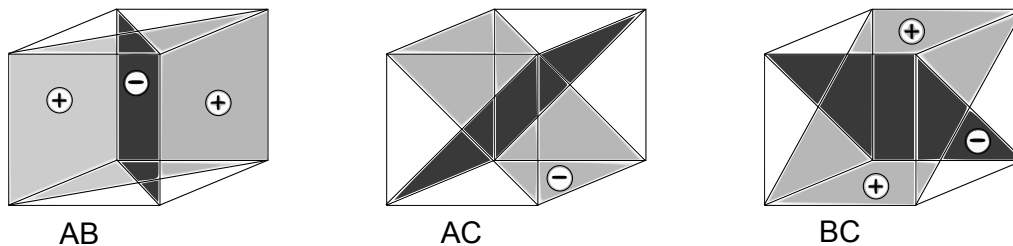
V  $2^3$  faktorovom experimente vystupujú 2 typy interakcií a to tri dvojfaktorové a jedna trojfaktorová interakcia.

Dvojfaktorová interakcia  $AB$  sa vypočíta pomocou obrázku 3.7 ako rozdiel priemerov odoziev na dvoch diagonálnych úrovniach v kocke.

$$\text{efekt interakcie } AB = \frac{1}{4n} [abc + ab + c + (1) - bc - ac - a - b]$$

$$\text{efekt interakcie } AC = \frac{1}{4n} [abc + ac + b + (1) - ab - bc - a - b]$$

$$\text{efekt interakcie } BC = \frac{1}{4n} [abc + bc + a + (1) - ab - ac - b - c]$$

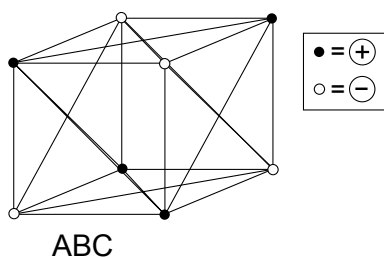


Obrázok 3.7: Geometrické znázornenie interakcií AB, AC a BC

Interakcia  $ABC$  je definovaná ako priemerný rozdiel medzi interakciou  $AB$  na hornej úrovni faktoru  $C$  a na dolnej úrovni  $C$ . Zjednodušene sa dá určiť aj pomocou grafického znázornenia na obrázku 3.8. Definuje sa ako rozdiel dvoch priemerov z hodnôt, ktoré sú určené pomocou dvoch typov vrcholov tetrahedrónu tvoriacich kocku.



$$\text{efekt interakcie } ABC = \frac{1}{4n} [abc + c + b + a - (1) - ab - ac - bc]$$



Obrázok 3.8: Geometrické znázornenie interakcie ABC

### Regresný model faktorového experimentu s tromi faktormi

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \varepsilon$$

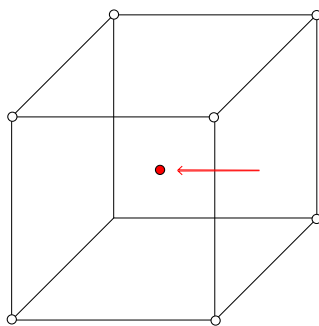
kde

- $y$  je hodnota odozvy
- $\beta_0$  je priemerná hodnota odozvy
- $\beta_i$  sú regresné koeficienty
- $\beta_{ij}$  sú regresné koeficienty pre dvojfaktorovú interakciu medzi parametrami
- $\beta_{123}$  je regresný koeficient pre trojfaktorovú interakciu medzi parametrami
- $\varepsilon$  je náhodná chyba
- $x_1$  je premenná, ktorá reprezentuje faktor A
- $x_2$  je premenná, ktorá reprezentuje faktor B
- $x_3$  je premenná, ktorá reprezentuje faktor C

## 3.5 Pridanie centrálného bodu do $2^k$ faktorového návrhu

Už podľa názvu je zrejmé, že centrálny bod leží uprostred experimentálneho priestoru. Predstavuje experimentálne meranie, ktoré má nastavené všetky faktory na strednej úrovni vždy medzi dolnou a hornou úrovňou faktoru. Zvyčajne sa vykonáva replikované meranie v týchto bodoch dva alebo tri krát. Samozrejme záleží individuálne na experimente.

**Centrálné body** môžu byť použité iba v návrhu, ktorého faktory sú *kvantitatívne*, teda nastavené na číselné hodnoty. Ak sa v návrhu vyskytne kombinácia číselných a kategorických faktorov, potom ide o **pseudo-centrálné body**. Tieto body sú vytvorené v centrálnych bodoch číselných faktorov pre každú kombináciu úrovní kategorických faktorov. Pridanie centrálnych bodov do faktorového návrhu poskytuje informáciu o *zakrivení v odozvovej ploche*. Ak zakrivenie existuje, odozva v centrálnom bode je buď vyššia, alebo nižšia než priemerná odozva v krajných bodoch faktorového návrhu. Je taktiež dobrým meradlom experimentálneho šumu. [7]



Obrázok 3.9: Centrálny bod

### 3.6 Princíp čiastočného faktorového experimentu

Veľmi často sa stáva, že na vykonanie úplného faktorového experimentu nie je dostatočné množstvo času, peňazí alebo surovín. Ak sa dá odôvodnene predpokladať, že niektoré interakcie vyšších rádov, ako napríklad tretieho a vyššieho rádu, nie sú dôležité, potom informácie o hlavných efektoch a interakciách druhého rádu môžu byť získané pomocou analýzy **čiastočného faktorového experimentu**. Jedná sa o typ experimentu, ktorý je najviac používaný v priemyselnom odvetví.

Čiastočný plán experimentu nie je ľubovoľne menší plán vzhľadom k úplnému faktorovému návrhu  $2^k$ . Musí byť skrátený tak, aby bolo možné vypočítať všetky koeficienty zvoleného modelu. Všeobecný zápis plánu je  $2^{k-p}$ , kde  $k$  je počet faktorov a  $1/2^p$  reprezentuje časť úplného faktorového experimentu  $2^k$ .

Faktorový plán  $2^k$  sa dá skrátiť:

- na polovicu:  $2^{k-1}$
- na štvrtinu:  $2^{k-2}$
- inak

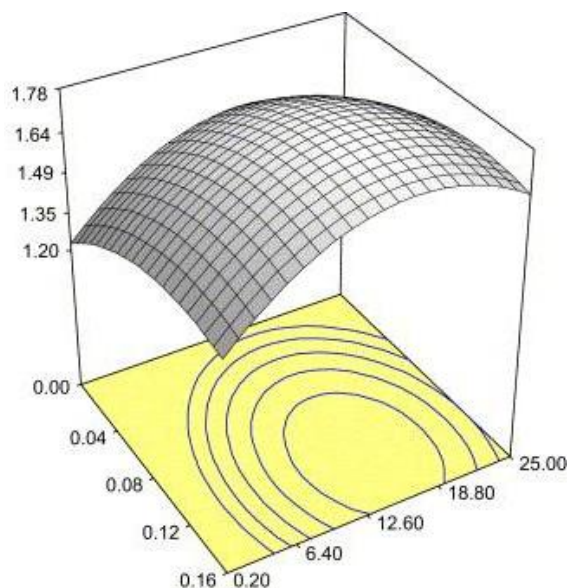
Celkový počet pokusov po znížení  $n$  nesmie byť menší ako počet faktorov, teda  $n \geq k$ . Na základe uvedených podmienok sa čiastočné faktorové experimenty ďalej delia napr. na polovičné, saturované, stredové a ortogonálne návrhy. Viac informácií o týchto rozdeleniach je možné nájsť v [9].

Použitie čiastočného faktorového návrhu má svoje výhody a nevýhody. Hlavnou výhodou oproti úplnému faktorovému experimentu je, že umožňuje štúdium relatívne veľkého množstva faktorov za predpokladu menšieho množstva vykonávaných meraní. Nevýhodou naopak môže byť náchylnosť na špeciálne prípady premenlivosti, ktoré sa veľmi ťažko určujú a sklon k vynechaniu dôležitých hodnôt. V teoretickej rovine je čiastočný faktorový experiment zložitejší než úplný faktorový experiment.

## 4 Metóda odozvových plôch

Metóda odozvových plôch, v literatúre často uvádza pomocou anglického názvu **response surface design**, je jedným zo základných návrhov plánovaného experimentu (DoE), ktorý pomáha lepšie pochopiť a optimalizovať odozvu. Metodóda sa používa na upresnenie modelov po tom, čo sú pomocou faktorových návrhov zistené dôležité faktory. Najmä vtedy, ak sa javí významné zakrivenie v odozvovej ploche. [7]

Graficky môže byť odozgová plocha znázornená tak, ako je uvedené na obrázku 4.1. Pre lepšiu vizualizáciu zakrivenia sú vykreslené vrstevnice odozvovej plochy. [8]



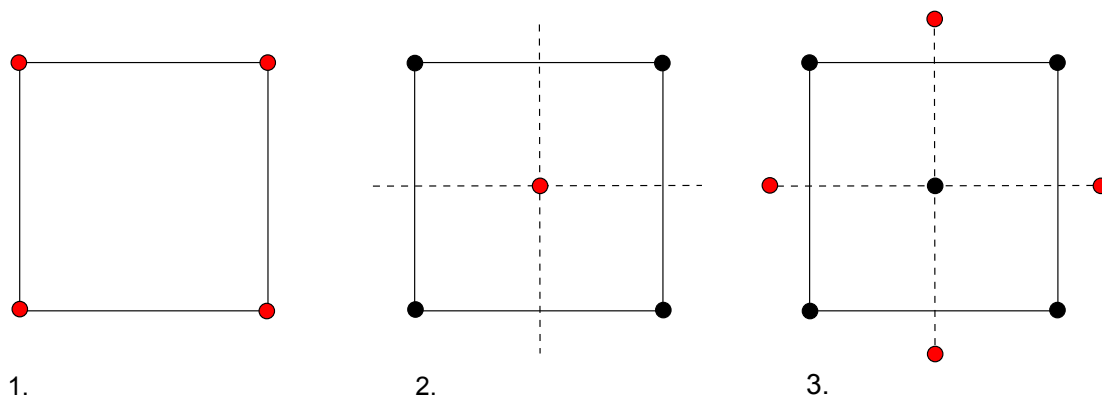
Obrázok 4.1: Odozgová plocha a vrstevnice

V nasledujúcom texte budú bližšie popísané dva základné typy *metódy odozvových plôch*: **centrálny kompozitný návrh** a **Box-Behnkenov návrh**. [7]

### 4.1 Centrálny kompozitný návrh

Centrálny kompozitný návrh patrí medzi najpoužívanejšie kompozitné návrhy. Pozostáva z 3 častí znázornených na obrázku 4.2:

1. **jadro návrhu** – tvorí ho úplný faktorový experiment s  $2^k$  faktorovými bodmi, kde  $k$  je počet faktorov. V prípade, že je počet faktorov  $k > 4$  je možné použiť čiastočný faktorový experiment  $2^{k-p}$ . Finálny počet bodov je označený  $n_f$ .
2. **centrálny bod** – je bod v centre návrhu. Počet meraní v tomto bode je  $n_c \geq 0$ .
3. **axiálne body** – nazývané tiež hviezdicové, sú body ležiace na súradnicových osiach vo vzdialenosti  $\alpha > 0$  od centra návrhu. Ich počet je dvojnásobne väčší, než je počet faktorov, teda  $n_s = 2k$ .

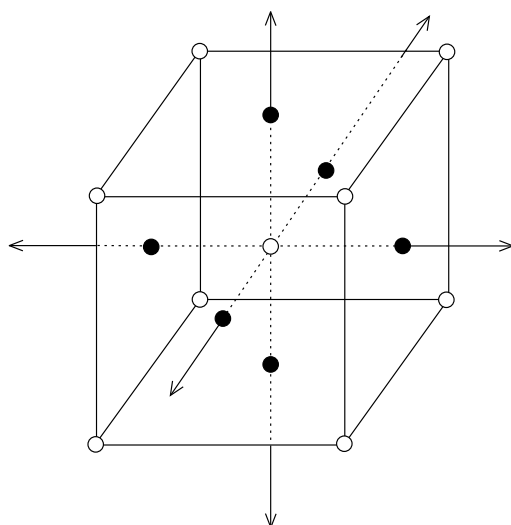


Obrázok 4.2: Tri typy bodov

Pomocou faktorových bodov sa dajú odhadnúť lineárne efekty a efekty interakcie, ale nie je možné odhadnúť zakrivenie. *Centrálné body* určia, či je zakrivenie významné, ale nedajú sa pomocou nich skontrolovať jednotlivé kvadratické podmienky. Na to slúžia *axiálne body*.

Dôležitá je voľba vzdialenosti  $\alpha$  od centra návrhu v axiálnych bodoch. Na základe toho sa dá centrálny kompozitný návrh klasifikovať na ďalšie typy.

Ak je  $\alpha = 1$ , ide o **face-centered** centrálny kompozitný návrh (CCF). V tomto návrhu sú umiestnené axiálne body do stredov stien kocky, ako je uvedené na obrázku 4.3 pre počet faktorov  $k = 3$ . Tento typ centrálného kompozitného návrhu sa zvykne používať z toho dôvodu, lebo vyžaduje merania iba pre tri úrovne faktorov, *dolnú*, *hornú* a *strednú*, a v praxi je obvykle náročné tieto úrovne meniť.



Obrázok 4.3: Face-centered centrálny kompozitný návrh

Keď sa zvolí  $\alpha > 0$ , dá sa pomocou vhodného nastavenia zaručiť *rotabilita* návrhu. Ak hodnota  $\alpha$  pre rotabilitu závisí na počte bodov vo faktorovej časti návrhu, zvyčajne sa počíta ako  $\alpha = (n_f)^{1/4}$ . Rotabilita je sférická vlastnosť. To znamená, že hlavným kritériom nastavenia oblasti záujmu je sféra. Ak sa nastaví  $\alpha = \sqrt{k}$ , budú všetky faktorové aj axiálne body ležať na sfére. Tento návrh sa nazýva **sférický** centrálny kompozitný návrh. Pre zaručenie dobrého návrhu nie je až také dôležité mať úplne presnú rotabilitu.

## Tabuľka návrhu

Tabuľka 4.1: Centrálny kompozitný návrh pre 3 faktory

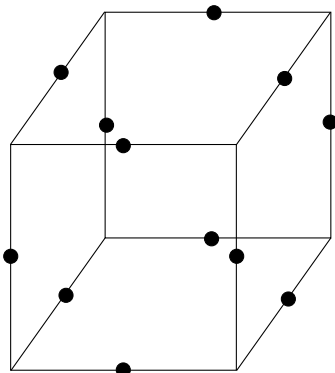
| Poradové číslo | Úroveň A | Úroveň B | Úroveň C | Odozva   |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| 1              | -1       | -1       | -1       | $y_1$    |
| 2              | 1        | -1       | -1       | $y_2$    |
| 3              | -1       | 1        | -1       | $y_3$    |
| 4              | 1        | 1        | -1       | $y_4$    |
| 5              | -1       | -1       | 1        | $y_5$    |
| 6              | 1        | -1       | 1        | $y_6$    |
| 7              | -1       | 1        | 1        | $y_7$    |
| 8              | 1        | 1        | 1        | $y_8$    |
| 9              | 1        | 0        | 0        | $y_9$    |
| 10             | -1       | 0        | 0        | $y_{10}$ |
| 11             | 0        | 1        | 0        | $y_{11}$ |
| 12             | 0        | -1       | 0        | $y_{12}$ |
| 13             | 0        | 0        | 1        | $y_{13}$ |
| 14             | 0        | 0        | -1       | $y_{14}$ |
| 15             | 0        | 0        | 0        | $y_{15}$ |
| 16             | 0        | 0        | 0        | $y_{16}$ |
| 17             | 0        | 0        | 0        | $y_{17}$ |
| 18             | 0        | 0        | 0        | $y_{18}$ |
| 19             | 0        | 0        | 0        | $y_{19}$ |
| 20             | 0        | 0        | 0        | $y_{20}$ |

Centrálny kompozitný návrh sa zvyčajne odporúča, ak návrh vyžaduje postupné experimentovanie. To znamená, že je najskôr vykonaný klasický faktorový experiment, ktorý je analyzovaný. Centrálny kompozitný návrh môže ďalej pracovať s týmito informáciami. Faktorové a stredové body slúžia ako predbežná fáza, kde je kvalifikovaný model prvého rádu, tj. lineárny model. Ďalej tiež poskytujú dôkazy týkajúce sa dôležitosti príspevku druhého rádu a zakrivenia.

## 4.2 Box-Behnkenov návrh

Podobným návrhom ako bol face-centered je **Box-Behnkenov návrh experimentu**. Rozdiel je ale v tom, že jeho časťou nie je faktoriálny alebo čiastočný faktoriálny návrh. Nepozostáva teda z bodov, ktoré ležia vo vrcholoch kocky tvorených dolnou a hornou

úrovňou jednotlivých faktorov. Merania v Box-Behnkenovom návrhu prebiehajú v stredových bodoch hrán kocky, ktorá znázorňuje experimentálny priestor. Je sférický, tým pádom všetky body merania ležia na sfére s polomerom  $\sqrt{2}$ . Vyžaduje prítomnosť minimálne troch faktorov. Na obrázku 4.4 sú znázornené body, ktoré reprezentujú jednotlivé pozorovania:



Obrázok 4.4: Box-Behnkenov návrh

Tieto návrhy umožňujú efektívny odhad koeficientov prvého a druhého rádu. Vďaka tomu, že Box-Behnkenov návrh má menej konštrukčných bodov, môže byť z finančného hľadiska a z hľadiska pracovnej náročnosti vhodnejší ako centrálny kompozitný návrh s rovnakým počtom faktorov. Na druhej strane, keďže neobsahuje faktorovú časť návrhu, nie je možné použiť ho pre sekvenčné experimenty.

## Tabuľka návrhu

Tabuľka 4.2: Box-Behnkenov návrh pre 3 faktory

| Poradové číslo | Úroveň A | Úroveň B | Úroveň C | Odozva   |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| 1              | -1       | -1       | 0        | $y_1$    |
| 2              | -1       | 1        | 0        | $y_2$    |
| 3              | 1        | -1       | 0        | $y_3$    |
| 4              | 1        | 1        | 0        | $y_4$    |
| 5              | -1       | 0        | -1       | $y_5$    |
| 6              | -1       | 0        | 1        | $y_6$    |
| 7              | 1        | 0        | -1       | $y_7$    |
| 8              | 1        | 0        | 1        | $y_8$    |
| 9              | 0        | -1       | -1       | $y_9$    |
| 10             | 0        | -1       | 1        | $y_{10}$ |
| 11             | 0        | 1        | -1       | $y_{11}$ |
| 12             | 0        | 1        | 1        | $y_{12}$ |
| 13             | 0        | 0        | 0        | $y_{13}$ |
| 14             | 0        | 0        | 0        | $y_{14}$ |
| 15             | 0        | 0        | 0        | $y_{15}$ |

## 5 Realizácia plánovaného experimentu

Po tom, čo boli popísané jednotlivé typy *faktorových návrhov* a tiež boli popísané dva základné typy *metódy odozvoových plôch*, je možné pristúpiť k ich aplikácii na reálnu úlohu. Táto úloha bude venovaná modelovaniu dostrelu loptičky z katapultu. V prvom kroku musia byť určené premenné, ktoré sú zahrnuté do experimentu, teda faktory a odozva. V druhom kroku sú vykonané merania. Pre praktickú časť tejto diplomovej práce je využitý štatistický softvér MINITAB 16. S jeho pomocou sa spracujú dáta, vytvoria sa diagramy a zanalyzujú sa výsledky.

V prvej časti tejto kapitoly je zaznamenané a analyzované meranie vo faktorových a centrálnych bodoch. Sú určené významnosti jednotlivých faktorov a ich interakcií. Počas analýzy je zistený vplyv centrálnych bodov na výstup. To znamená, že v regresnom modeli vychádza významné zakrivenie, a preto je potrebné pre ďalšie analýzy použiť metódy odozvoových plôch. V druhej časti tejto kapitoly je použitý centrálny kompozitný návrh, v ktorom postačia merania z faktorového experimentu a sú vykonané dodatočné merania v axiálnych bodoch. Tretia časť kapitoly sa venuje Box-Behnkenovmu návrhu. Schéma tohto návrhu je odlišná. Nie je možné použiť faktorový návrh, a preto sú vykonané úplne nové merania. Na záver sú uvedené porovnania jednotlivých typov návrhov experimentu.



Obrázok 5.1: Katapult

## 5.1 Úplný faktorový experiment s výsledkami merania

Cieľom experimentu je určenie významnosti jednotlivých faktorov a ich interakcií. Pre spracovanie je použitý úplný faktorový experiment s 1 replikáciou. Merania dostrelu sú vykonávané jednou loptičkou, tou istou pre meranie A aj B, vo všetkých kombináciách úrovní faktorov. K tomuto sú tiež pridané 4 merania v centrálnom bode, teda v priemere úrovní všetkých numerických faktorov. Znáhodnenie je realizované pomocou MINITABU, viď tabuľka 5.1. Celkom je vykonaných 20 meraní.

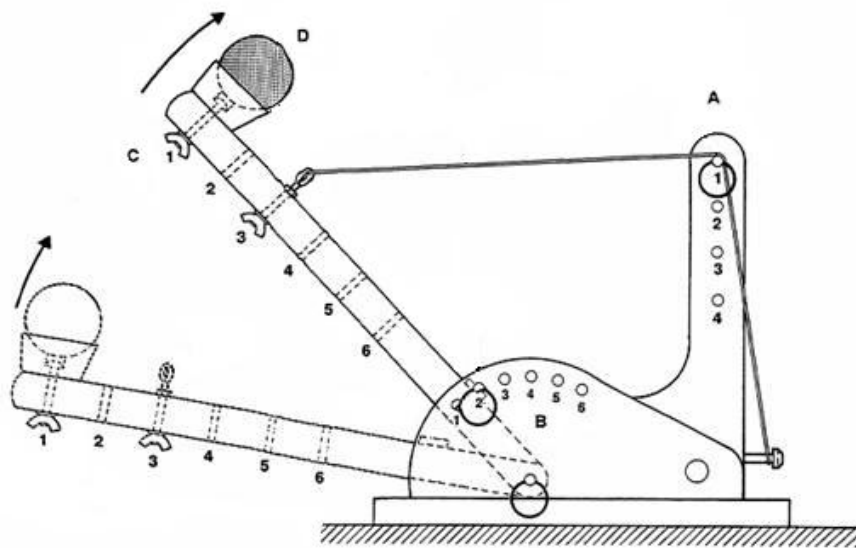
**Premenné zahrnuté do experimentu:**

*Faktory:*

- $A$  – napnutie (úroveň 2 – 4)
- $B$  – uhol (úroveň 2 – 4)
- $C$  – rameno (úroveň 1 – 3)
- $D$  – loptička (A, B)

*Odozva:*

- dostrel



Obrázok 5.2: Schéma (prebraté z: [10])

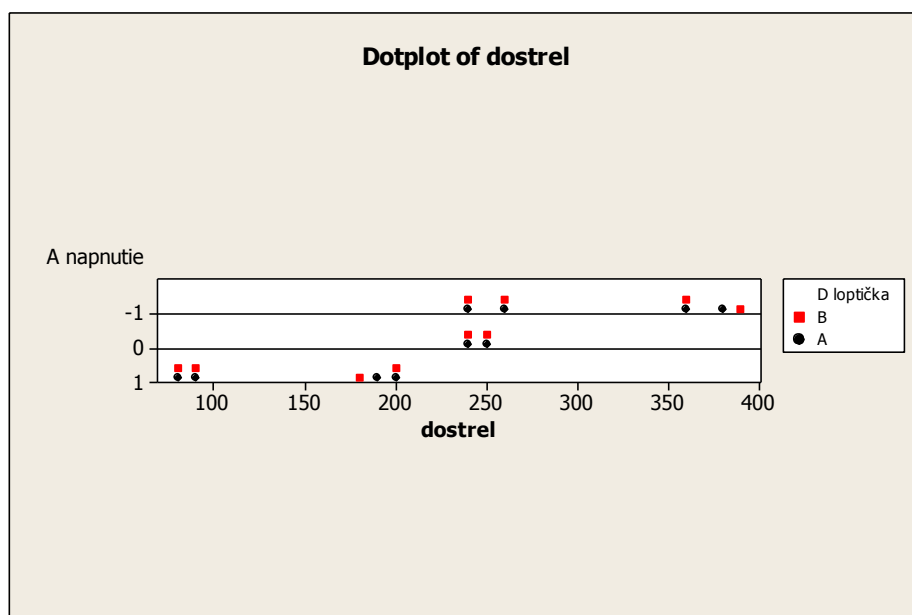
**Poznámka:** V ďalšom texte budú úrovne jednotlivých numerických faktorov (t.j. faktorov  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) popísané v kódovaných premenných, teda pomocou symboliky:  $-1$  pre dolnú úroveň,  $0$  pre centrálny bod a  $1$  pre hornú úroveň. Faktor  $D$  je textového typu a zostáva bez zmeny. Výsledky merania dostrelu sú uvedené v centimetroch.



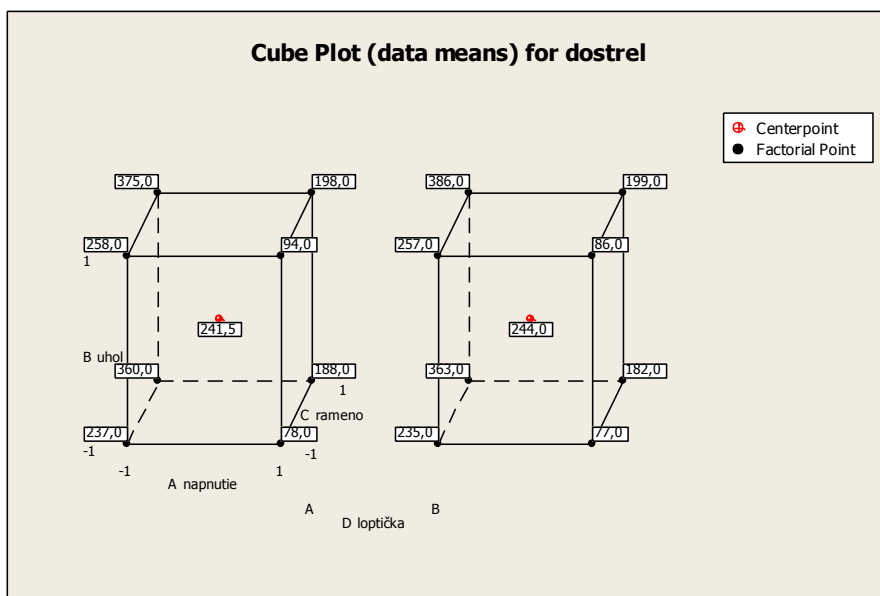
Namerané hodnoty odozvy:

Tabuľka 5.1: Merania úplného faktorového návrhu

| Poradové číslo | A - napnutie | B - uhol | C - rameno | D - loptička | dostrel |
|----------------|--------------|----------|------------|--------------|---------|
| 1              | -1           | -1       | 1          | B            | 363     |
| 2              | 1            | -1       | -1         | A            | 78      |
| 3              | 1            | -1       | 1          | B            | 182     |
| 4              | 1            | 1        | 1          | B            | 199     |
| 5              | 1            | 1        | -1         | B            | 86      |
| 6              | -1           | -1       | 1          | A            | 360     |
| 7              | 0            | 0        | 0          | A            | 238     |
| 8              | -1           | 1        | -1         | A            | 258     |
| 9              | 0            | 0        | 0          | B            | 245     |
| 10             | -1           | 1        | 1          | A            | 375     |
| 11             | -1           | 1        | -1         | B            | 257     |
| 12             | 1            | -1       | -1         | B            | 77      |
| 13             | 0            | 0        | 0          | B            | 243     |
| 14             | -1           | -1       | -1         | A            | 237     |
| 15             | 1            | 1        | -1         | A            | 94      |
| 16             | 1            | 1        | 1          | A            | 198     |
| 17             | 1            | -1       | 1          | A            | 188     |
| 18             | 0            | 0        | 0          | A            | 245     |
| 19             | -1           | 1        | 1          | B            | 386     |
| 20             | -1           | -1       | -1         | B            | 235     |

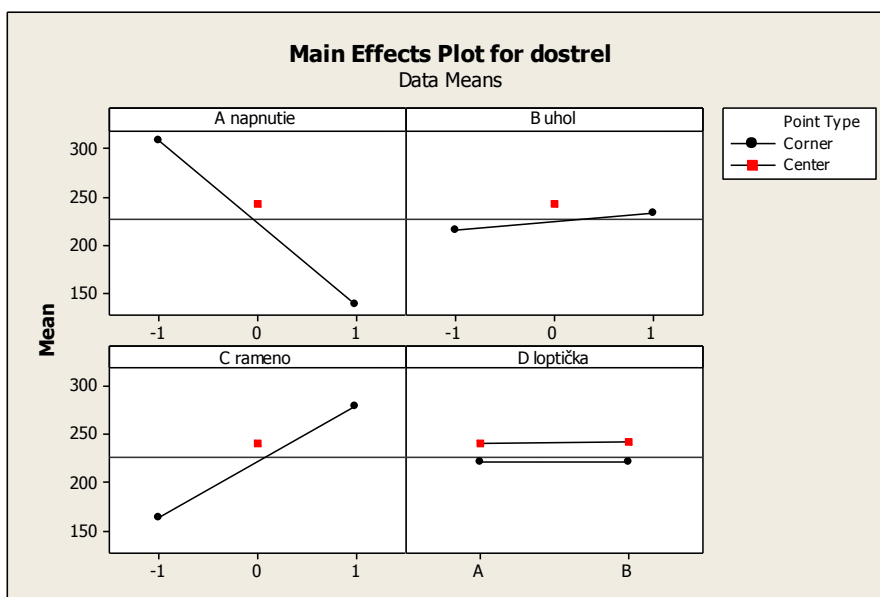


Obrázok 5.3: Grafické znázornenie jednotlivých meraní pomocou bodového grafu

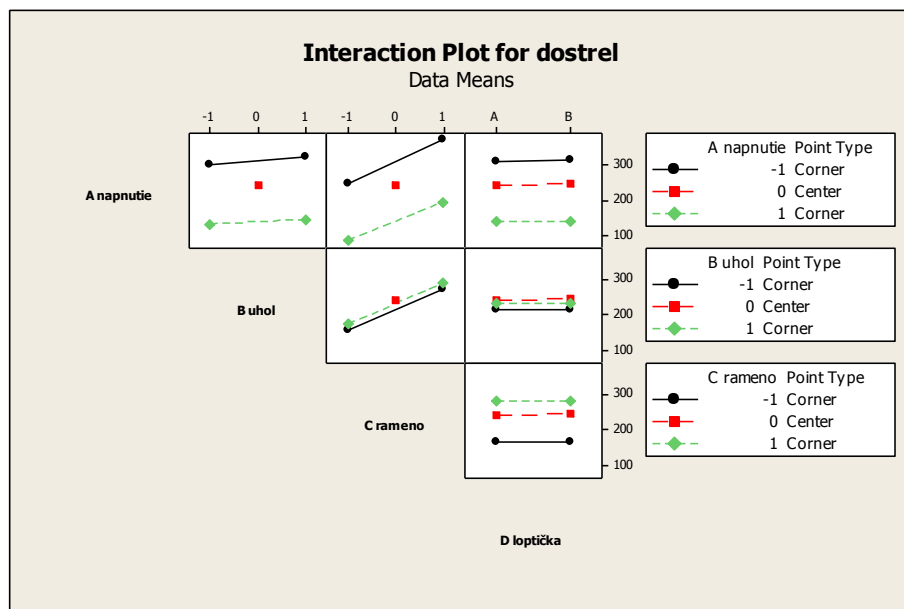


Obrázok 5.4: Grafické znázornenie jednotlivých meraní pomocou cube plot

Bodový graf na obrázku 5.3 znázorňuje individuálne merania v závislosti dostrelu na napnutí. Je možné z neho určiť najbližšie a najvzdialenejšie miesto dostrelu. Taktiež je vidieť, že dostrely oboch loptičiek A a B sa zobrazujú súbežne. Je to, samozrejme, spôsobené tým, že merania sú vykonávané tou istou loptičkou. Jednotlivé kombinácie úrovní všetkých faktorov sú pre lepšiu názornosť zobrazené pomocou cube plot na obrázku 5.4. Pomocou tohto grafu sa dá určiť najlepšia a najhoršia kombinácia faktorov pre dosiahnutie požadovanej optimálnej odozvy.



Obrázok 5.5: Grafické znázornenie hlavných efektov



Obrázok 5.6: Grafické znázornenie interakcií

Vykreslenie 2 grafov faktorového experimentu:

- Graf hlavných efektov
- Graf interakcií

Hlavný efekt je rozdiel priemerov odoziev medzi dvoma úrovňami faktoru. Graf hlavných efektov sa využíva na porovnanie efektov jednotlivých faktorov na odozvu plánovaného experimentu. Dá sa z neho vyčítať, či ide o efekty kladné, alebo záporné a na základe veľkosti úsečiek sa dá určiť vplyv jednotlivých faktorov. Graf interakcií popisuje vplyv vzájomného pôsobenia dvojíc faktorov na odozvu. Interakcia znamená, že efekt (účinnok) jedného faktoru závisí na úrovni druhého faktoru. Podrobnejší rozbor interakcií bol uvedený na obrázku 3.1.

Z grafu hlavných efektov 5.5 je vidieť, že najvýznamnejšími faktormi sú nastavenia napnutia a ramena katapultu. Nastavenie napnutia je záporným faktorom a nastavenie ramena je kladným faktorom. Faktor *D*-loptička sa javí ako nevýznamný a významnosť faktoru nastavenia uhla katapultu *B* je otázná, zatiaľ sa javí ako veľmi malá.

Na obrázku 5.6 je vidieť, že všetky úsečky, ktoré zobrazujú interakcie dvojíc faktorov, sú rovnobežné. Preto je možné usúdiť, že žiadna z interakcií faktorov nie je významná. V tomto momente ešte nie je možné určiť, či ide o štatistickú významnosť, resp. nevýznamnosť. Viac informácií poskytne podrobnejšia regresná analýza.

## Analýza nameraných dát:

V prvom rade je dôležité zamerať sa na textový výstup, konkrétne na tabuľku s vypočítanými efektami. Táto tabuľka je prvým pokusom o vytvorenie matematického modelu.

- V prvom stĺpci je vypočítaný efekt faktoru (odozva na zmenu faktoru z  $-1$  na  $1$ )
- V druhom stĺpci je regresný koeficient faktoru
- V treťom stĺpci je štandardná chyba koeficientov
- V štvrtom stĺpci T určuje hodnotu testovacieho kritéria
- V poslednom, piatom stĺpci je pomocou p-hodnoty vyjadrená štatistická významnosť faktoru alebo interakcie

### Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                                  | Effect  | Coef   | SE Coef | T       | P     |
|---------------------------------------|---------|--------|---------|---------|-------|
| Constant                              |         | 223,31 | 0,8306  | 268,87  | 0,000 |
| A napnutie                            | -171,12 | -85,56 | 0,8306  | -103,02 | 0,000 |
| B uhol                                | 16,63   | 8,31   | 0,8306  | 10,01   | 0,002 |
| C rameno                              | 116,13  | 58,06  | 0,8306  | 69,91   | 0,000 |
| D loptička                            | 0,20    | 0,10   | 0,7429  | 0,13    | 0,901 |
| A napnutie*B uhol                     | -3,62   | -1,81  | 0,8306  | -2,18   | 0,117 |
| A napnutie*C rameno                   | -8,12   | -4,06  | 0,8306  | -4,89   | 0,016 |
| A napnutie*D loptička                 | -3,13   | -1,56  | 0,8306  | -1,88   | 0,157 |
| B uhol*C rameno                       | -0,37   | -0,19  | 0,8306  | -0,23   | 0,836 |
| B uhol*D loptička                     | 1,13    | 0,56   | 0,8306  | 0,68    | 0,547 |
| C rameno*D loptička                   | 2,62    | 1,31   | 0,8306  | 1,58    | 0,212 |
| A napnutie*B uhol*C rameno            | 0,87    | 0,44   | 0,8306  | 0,53    | 0,635 |
| A napnutie*B uhol*D loptička          | -1,12   | -0,56  | 0,8306  | -0,68   | 0,547 |
| A napnutie*C rameno*D loptička        | -1,62   | -0,81  | 0,8306  | -0,98   | 0,400 |
| B uhol*C rameno*D loptička            | 2,62    | 1,31   | 0,8306  | 1,58    | 0,212 |
| A napnutie*B uhol*C rameno*D loptička | 0,88    | 0,44   | 0,8306  | 0,53    | 0,635 |
| Ct Pt                                 |         | 19,44  | 1,8572  | 10,47   | 0,002 |

S = 3,32227      PRESS = 10423,0  
R-Sq = 99,98%      R-Sq(pred) = 94,00%      R-Sq(adj) = 99,88%

Obrázok 5.7: Výstup z MINITABU

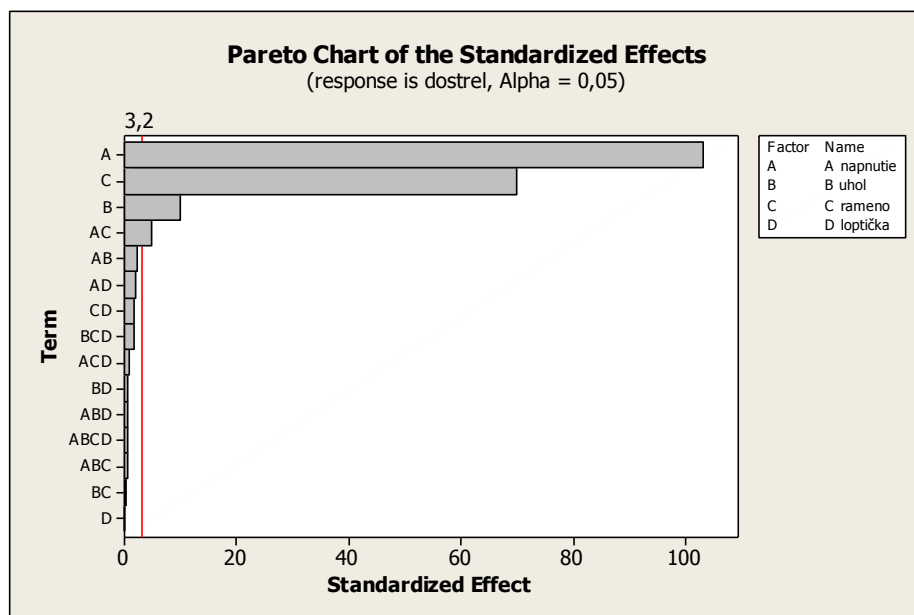
Prvý textový výstup z MINITABU na obrázku 5.7 udáva, že v regresnom modeli vychádza významné zakrivenie. Na hladine významnosti 0,05 bola testovaná nulová hypotéza  $H_0 : A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 0$ , že model žiadne zakrivenie neobsahuje. V textovom výstupe je táto hypotéza skrátaná na označenie *Ct Pt* (vyznačené žltou farbou). P-hodnota 0,002 určuje, že je táto hypotéza zamietnutá. To značí, že zahrnutie centrálnych bodov pre ďalšiu analýzu plánovaného experimentu je významné a podstatné. Teda v ďalšom kroku nie je vhodné použiť samotný faktorový experiment. Tento model dáva dobré výsledky iba okolo bodov vrcholov kocky znázorňujúcej experimentálny priestor.

**Poznámka:** Pre spresnenie modelu je potrebné domerať hodnoty v axiálnych bodoch, t.j. v stredoch stien kocky, a analyzovať spolu s kvadratickými efektami ako centrálny kompozitný návrh.

Nasledujúci model nebude používaný k popisu odozvy, iba k overeniu významnosti faktorov. Aby sa ukázalo, že faktor *D*-loptička je v tomto modeli štatisticky nevýznamný, keďže je meranie pre nastavenie A aj B vykonávané jednou a tou istou loptičkou, je použitý klasický úplný faktorový experiment. Pristúpi sa k ďalšiemu kroku vyhodnocovania výstupov experimentu, kde sa oddelia faktory významné od tých, ktoré sú iba výsledkom experimentálneho šumu. Na daný účel poslúžia 2 grafy:

- Pareto diagram (graf paretovej analýzy) 5.8
- Graf normálnej pravdepodobnosti vplyvu faktorov 5.9

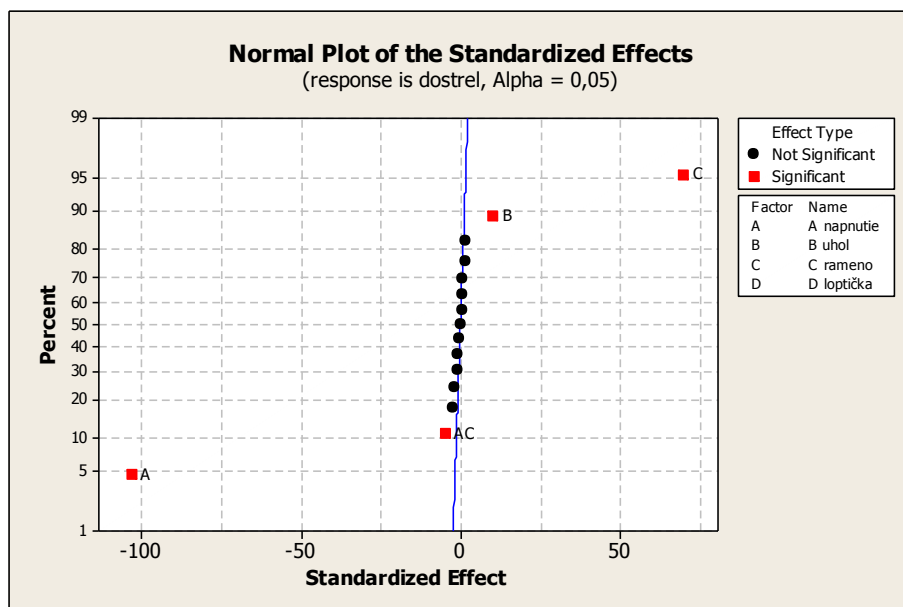
Využijú sa najskôr namerané dáta z tabuľky 5.1 a zanalyzujú sa bez centrálnych bodov. Rozbor je vykonaný pre všetky faktory a pre všetky vzájomné interakcie faktorov, t.j. 2-stupňová, 3-stupňová, 4-stupňová. Sledujú sa *p*-hodnoty, ktoré určujú, aký faktor a interakcia sú v modeli štatisticky významné resp. nevýznamné. Testy sú vykonávané na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$ . Pomocou regresnej analýzy sú postupne odoberané najmenej významné interakcie a faktory. Vylučujú sa od najvyššej veličiny, až kým nie sú všetky *p*-hodnoty modelu  $\leq 0,05$ . Čistenie modelu krok po kroku je uvedené v Prílohe A, vždy spolu s príslušným paretoovým diagramom.



Obrázok 5.8: Paretova analýza

V grafe 5.8 sú znázornené efekty faktorov a interakcií, zoradené podľa veľkosti. Podľa obrázku sa môže zdať, že skutočný vplyv má nastavenie napnutia *A*, uhla *B* a ramena *C*, ale aj interakcia napnutia s ramenom *AB*. Bude to ale platiť aj po celkovej analýze?

Na obrázku 5.9 je znázornený graf normálnej pravdepodobnosti vplyvu faktorov. Princíp vyhodnocovania spočíva v tom, že hodnoty testovacieho kritéria T sú vynesené do grafu. Viac informácií o tomto kritériu sa dá nájsť v [1]. Body, ktoré ležia blízko priamky sú nevýznamné a ich odpovedajúce hlavné efekty a interakcie pôsobia v regresnej rovnici ako šum. Tie, ktoré sa na priamku nezmestia, potom patria k *významným* faktorom. Významnosť je overená štatistickým testom. [6]



Obrázok 5.9: Graf normálnej pravdepodobnosti vplyvu faktorov

### Interpretácia výsledkov:

Po postupnom vylučovaní štatisticky nevýznamných faktorov a ich interakcií je možné nakoniec z obrázku 5.10 vidieť, že zo 4 faktorov majú iba 3 faktory štatisticky významný vplyv na dostrel. Očakávalo sa, že faktor *D* bude nevýznamný, keďže sa pri pokuse strieľalo iba s jednou loptičkou v oboch prípadoch A aj B. Nakoniec žiadna z možných interakcií, dokonca ani interakcia *AC*, nemá vplyv na dostrel.

### Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

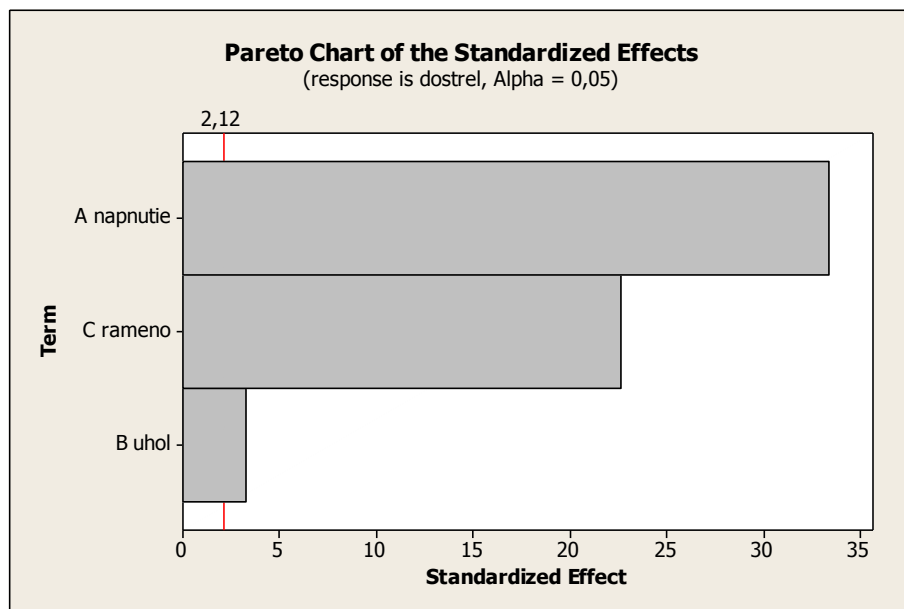
Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term       | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant   |         | 227,20 | 2,292   | 99,14  | 0,000 |
| A napnutie | -171,12 | -85,56 | 2,562   | -33,40 | 0,000 |
| B uhol     | 16,63   | 8,31   | 2,562   | 3,24   | 0,005 |
| C rameno   | 116,13  | 58,06  | 2,562   | 22,66  | 0,000 |

S = 10,2485      PRESS = 2278,52  
R-Sq = 99,03%      R-Sq(pred) = 98,69%      R-Sq(adj) = 98,85%

Obrázok 5.10: Výstup z MINITABU

Aj keď nebolo vhodné použiť samotný faktorový experiment bez centrálnych bodov, je možné na záver zhodnotiť, že predsa len priniesol významný poznatok. A to, že faktor *D*-loptička je štatisticky nevýznamný a v nasledujúcej analýze sa vyskytovať nebude. Ďalej sa berie tento model ako experiment s 3 faktormi a 2 replikáciami.



Obrázok 5.11: Paretova analýza

Odpovedajúci regresný model pre tento experiment je:

$$\text{DOSTREL} = 227,20 - 85,56 \cdot \text{NAPNUTIE} + 8,31 \cdot \text{UHOL} + 58,06 \cdot \text{RAMENO}$$

Je to momentálne najlepší model popisujúci dostrel, ale bohužiaľ neodpovedá realite. Preto sa ďalšie kapitoly zaoberajú metódami odozvočných plôch a modeluje sa dostrel loptičky pomocou centrálného kompozitného návrhu a Box-Behnkenovho návrhu.

## 5.2 Centrálny kompozitný návrh s výsledkami merania

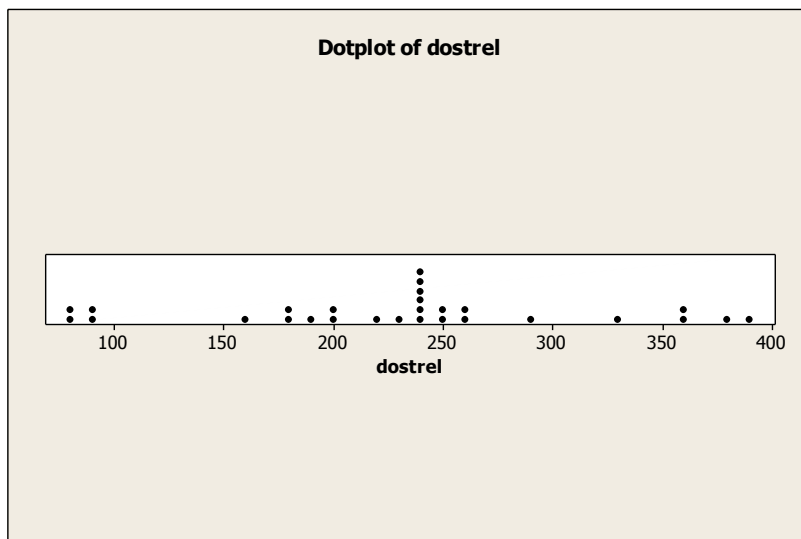
Ako už bolo avizované v predchádzajúcej časti, pre správne zhodnotenie modelu nie je vhodné použiť faktorový experiment. V regresnom modeli vyšlo významné zakrivenie, preto sa pristúpi k analýze centrálneho kompozitného návrhu. Pre jednoduchosť je zvolený face centered model 4.3. V tomto momente sa už berie experiment s 3 faktormi a 2 replikáciami reprezentovanými faktorom  $D$ , spolu so 4 meraniami v centrálnom bode. Sú používané hodnoty z tabuľky 5.1, kde je už ale faktor  $D$  v modeli vylúčený - v tabuľke vyznačený červenou. Ďalej sú domerané príslušné hodnoty v axiálnych bodoch, t.j. 6 meraní. A taktiež sú pridané ešte 2 merania v centrálnom bode. Celkovo je vykonaných 28 meraní:

Namerané hodnoty odozvy:

Tabuľka 5.2: Merania centrálneho kompozitného návrhu

| Poradové číslo | A - napnutie | B - uhol | C - rameno | D - loptička | dostrel |
|----------------|--------------|----------|------------|--------------|---------|
| 1              | -1           | -1       | 1          | B            | 363     |
| 2              | 1            | -1       | -1         | A            | 78      |
| 3              | 1            | -1       | 1          | B            | 182     |
| 4              | 1            | 1        | 1          | B            | 199     |
| 5              | 1            | 1        | -1         | B            | 86      |
| 6              | -1           | -1       | 1          | A            | 360     |
| 7              | 0            | 0        | 0          | A            | 238     |
| 8              | -1           | 1        | -1         | A            | 258     |
| 9              | 0            | 0        | 0          | B            | 245     |
| 10             | -1           | 1        | 1          | A            | 375     |
| 11             | -1           | 1        | -1         | B            | 257     |
| 12             | 1            | -1       | -1         | B            | 77      |
| 13             | 0            | 0        | 0          | B            | 243     |
| 14             | -1           | -1       | -1         | A            | 237     |
| 15             | 1            | 1        | -1         | A            | 94      |
| 16             | 1            | 1        | 1          | A            | 198     |
| 17             | 1            | -1       | 1          | A            | 188     |
| 18             | 0            | 0        | 0          | A            | 245     |
| 19             | -1           | 1        | 1          | B            | 386     |
| 20             | -1           | -1       | -1         | B            | 235     |
| 21             | -1           | 0        | 0          |              | 329     |
| 22             | 1            | 0        | 0          |              | 155     |
| 23             | 0            | -1       | 0          |              | 219     |
| 24             | 0            | 1        | 0          |              | 230     |
| 25             | 0            | 0        | -1         |              | 176     |
| 26             | 0            | 0        | 1          |              | 290     |
| 27             | 0            | 0        | 0          |              | 244     |
| 28             | 0            | 0        | 0          |              | 242     |





Obrázok 5.12: Bodový graf

### Analýza nameraných dát:

Z výsledkov centrálného kompozitného návrhu sa už dá zostrojiť model druhého rádu, v ktorom sú okrem vzájomných interakcií zastúpené aj druhé mocniny faktorov. Pri analýze nameraných dát sa postupuje obdobne ako v predchádzajúcom prípade. Sledujú sa p-hodnoty jednotlivých veličín a ich vzájomných aj kvadratických interakcií. Postupné odstraňovanie štatisticky nevýznamných členov je uvedené v Prílohe B. Finálny model má nasledujúci tvar:

### Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

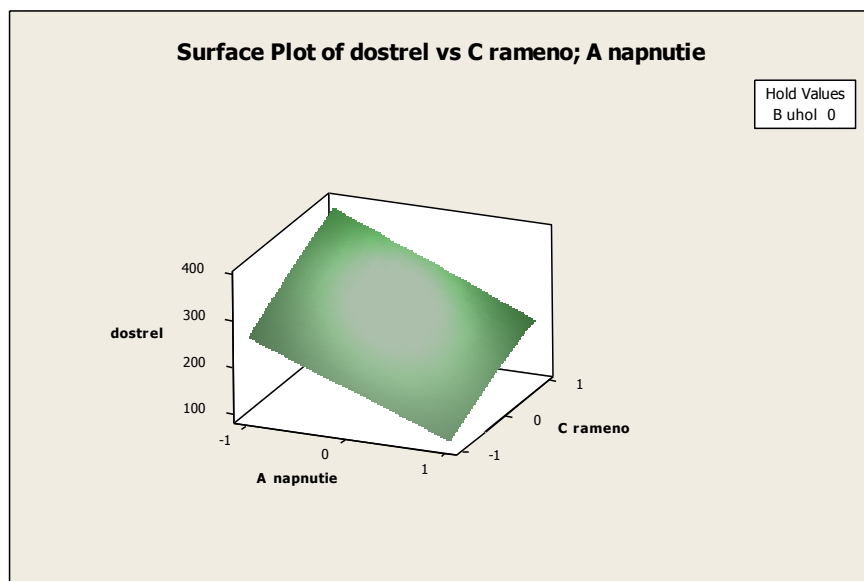
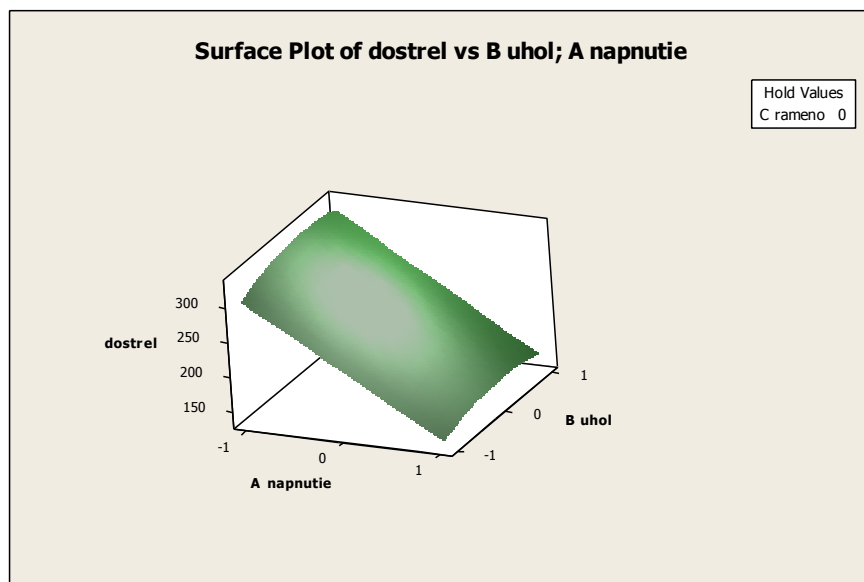
| Term                | Coef    | SE Coef | T        | P     |
|---------------------|---------|---------|----------|-------|
| Constant            | 241,737 | 1,1529  | 209,675  | 0,000 |
| A napnutie          | -85,722 | 0,8126  | -105,496 | 0,000 |
| B uhol              | 8,000   | 0,8126  | 9,845    | 0,000 |
| C rameno            | 57,944  | 0,8126  | 71,311   | 0,000 |
| B uhol*B uhol       | -13,684 | 1,8758  | -7,295   | 0,000 |
| C rameno*C rameno   | -5,184  | 1,8758  | -2,764   | 0,012 |
| A napnutie*B uhol   | -1,812  | 0,8619  | -2,103   | 0,048 |
| A napnutie*C rameno | -4,063  | 0,8619  | -4,714   | 0,000 |

S = 3,44742      PRESS = 511,724  
R-Sq = 99,88%    R-Sq(pred) = 99,74%    R-Sq(adj) = 99,84%

Obrázok 5.13: Výstup z MINITABU

Ďalej je pomocou grafických metód znázornená odozgová plocha. Sú dve možné zobrazenia:

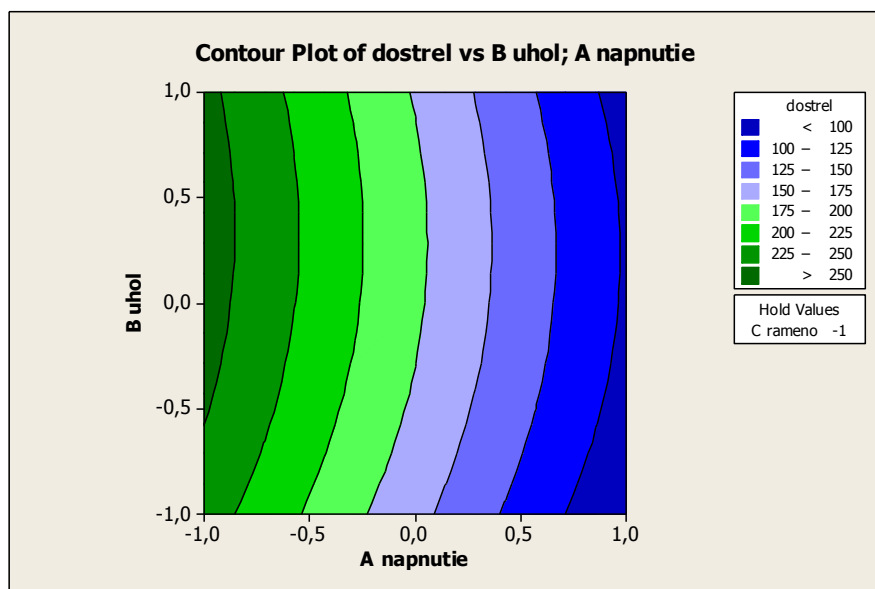
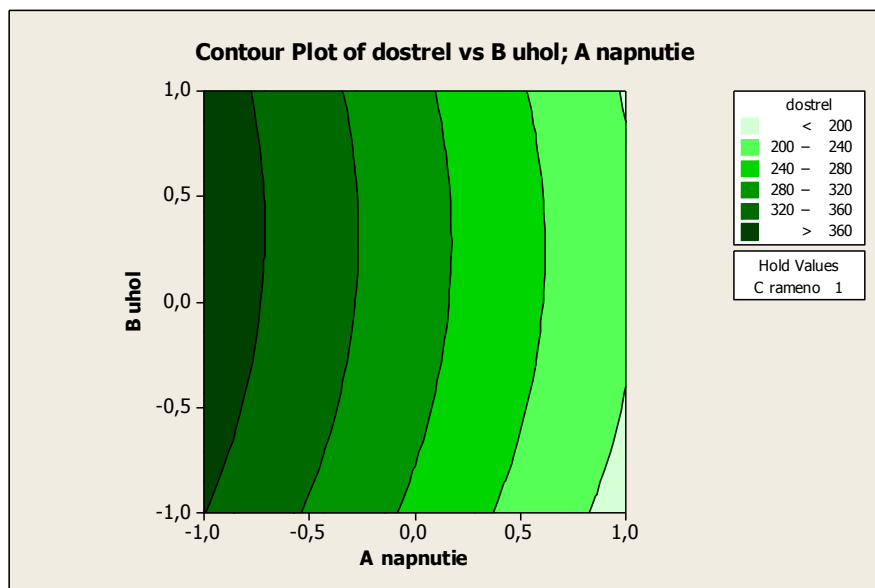
- **surface plot** – je 3D obrázok odozvovej plochy
- **contour plot** – je vrstevnicový diagram



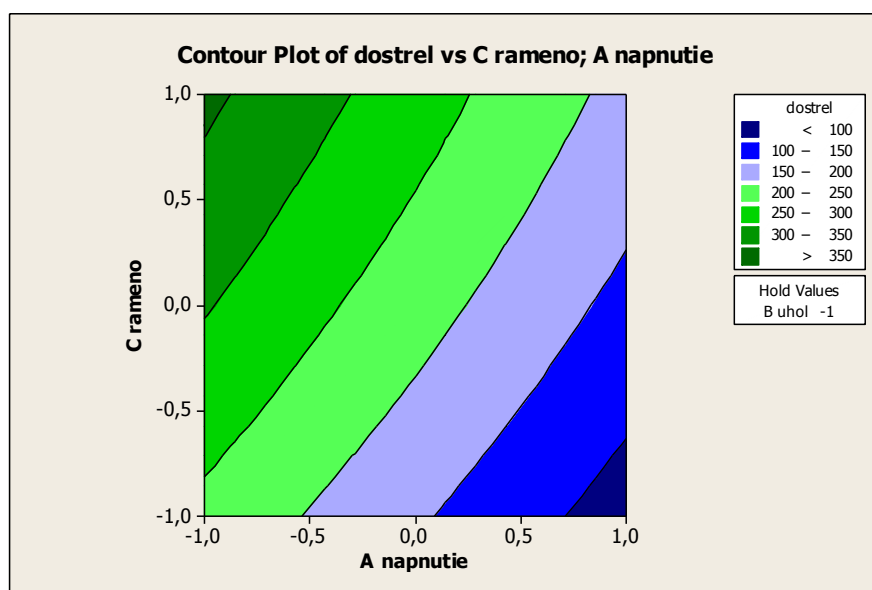
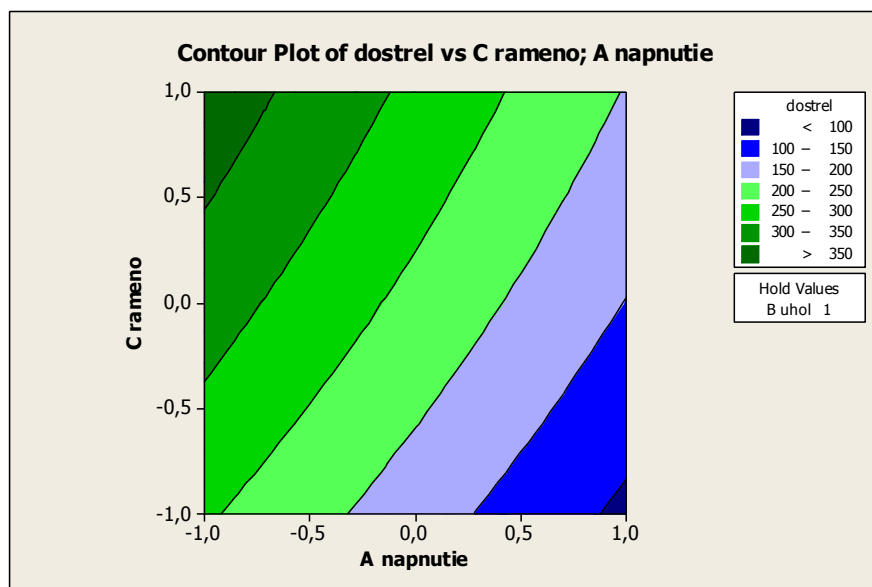
Obrázok 5.14: Surface plot

Z 3D grafu je názorne vidieť, že odozgová plocha má nejaké zakrivenie. Pomocou vrstevnicového diagramu sa ukáže, ako vyzerajú tieto odozgové plochy v rôznych úrovniach. Zobrazenie vrstiev je tiež dobrým nástrojom pri hľadaní vhodného pracovného bodu.

Pre porovnanie sú k odozvovým plochám z obrázku 5.14 zobrazené vždy 2 odpovedajúce vrstevnicové grafy pre rôzne nastavenia. Je vhodné položiť otázku: *Sú nastavenia pre experiment závislé na všetkých 3 faktoroch?* Obrázok 5.15 znázorňuje vrstevnicový graf závislosti dostrelu na faktoroch  $A$  a  $B$ . Mení sa nastavenie faktoru  $C$  z hornej úrovne na dolnú. Je možné si všimnúť posunutie medzi jednotlivými dvojicami grafov a tým pádom je jasne vidieť závislosť dostrelu nielen na dvoch faktoroch  $A$  vs.  $B$ , ale aj na treťom faktore  $C$ . Analogicky to platí aj v prípade obrázku 5.16, kde je znázornená závislosť dostrelu na faktoroch  $A$  vs.  $C$  spolu s meniacim sa faktorom  $B$ .



Obrázok 5.15: Contour plot



Obrázok 5.16: Contour plot

### Interpretácia výsledkov:

Po tom, ako boli k meraniam faktorového návrhu z jedného bloku pridané merania v axiálnych bodoch, MINITAB tieto doplňujúce merania zaradil do druhého bloku. Preto je v prvom kroku analýzy potrebné vyhodnotiť štatistickú významnosť týchto blokov. Ako je uvedené v Prílohe B, p-hodnota vychádza 0,160. Je teda vyššia ako 0,05 a preto je možné označiť zoskupovanie do blokov za štatisticky nevýznamné. Tento faktor je z modelu odstránený a následne sa postupne odstraňujú ďalšie štatisticky nevýznamné členy. Z výstupu na obrázku 5.13 je vidieť, že všetky 3 faktory  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sú štatisticky významné. Tiež sú ale významné aj interakcie  $AB$  a  $AC$  spolu s kvadratickými interakciami  $BB$  a  $CC$ .

Odpovedajúci regresný model pre tento experiment je:

$$\text{DOSTREL} = 241,737 - 85,722A + 8,000B + 57,944C - 13,684BB - 5,184CC - 1,812AB - 4,063AC$$

**Koeficient determinácie**  $r^2$  popisuje celkovú vypovedaciu hodnotu modelu. Nadobúda hodnoty z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Hovorí, z akej časti sú namerané hodnoty vysvetliteľné pomocou manipulácie s faktormi. Hodnoty blízke 1 naznačujú vhodnosť zvoleného tvaru regresnej funkcie. Číslo  $R\text{-}Sq = r^2 100\%$  vyjadruje percentuálny podiel z rozptylu nameraných hodnôt vysvetlený vypočítanou regresnou funkciou. [5]

V prípade centrálneho kompozitného návrhu dokáže matematický model procesu vysvetliť premenlivosť z 99,88%, čo je dosť vysoká hodnota.

Horný vrstevnicový graf na obrázku 5.15 ukazuje, že najväčší dostrel je možné realizovať pomocou akéhokoľvek nastavenia uhla katapultu, pri nastavení napnutia na najnižšiu úroveň a nastavení ramena na najvyššiu úroveň. Vtedy je možné strieľať až do vzdialenosti 360 cm. Na dolnom vrstevnicovom grafe je naopak vidieť nastavenia pre najmenší dostrel loptičky do vzdialenosti pod 100 cm. Napnutie je na najvyššej úrovni, rameno na najnižšej a nastavenie uhla môže byť opäť ľubovoľné. Odhady hodnôt sú určené z obrázku. V kapitole 5.4 budú uvedené presné odhady pomocou predikčného a konfidenčného intervalu.

Mohlo by sa javiť, že nastavenie uhla je teda nevýznamné. Na obrázku 5.16 je ešte jasnejšie vidieť, že pri nastavení uhla na najvyššiu a na najnižšiu úroveň, pri rovnakom nastavení ramena  $A$  a napnutia  $C$ , vychádza tento vrstevnicový graf skoro rovnaký. Nejde ale o žiadnu štatistickú nevýznamnosť faktoru  $B$ , ale o fakt, že tento faktor má nízku hodnotu efektu. Sledovaním ostatných faktorov a interakcií je vidieť, že dokonca najnižšiu. Dalo by sa preto povedať, že jeho vplyv na model je najmenší, ale v žiadnom prípade nie je nevýznamný.

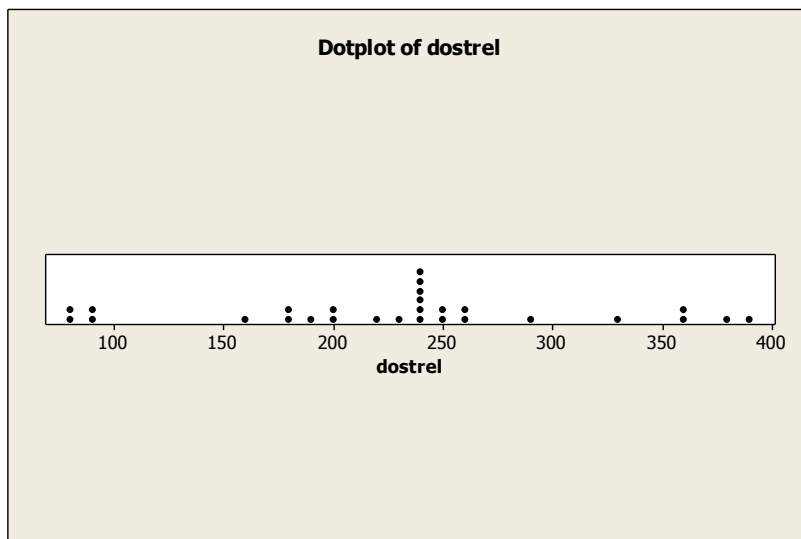
## 5.3 Box-Behnkenov návrh s výsledkami merania

Druhým typom metódy odozvočných plôch je Box-Behnkenov návrh. Aby sa mohol tento model porovnať s centrálnym kompozitným návrhom z kapitoly 5.2, v ktorom bolo vykonaných 28 meraní, volia sa pre 3 faktory 2 replikácie a 6 meraní v centrálnom bode. Je to z toho dôvodu, aby bol ich počet približne rovnaký. Celkovo je vykonaných 30 meraní.

Namerané hodnoty odozvy:

Tabuľka 5.3: Merania Box-Behnkenovho návrhu

| Poradové číslo | A - napnutie | B - uhol | C - rameno | dostrel |
|----------------|--------------|----------|------------|---------|
| 1              | 0            | 0        | 0          | 243     |
| 2              | 0            | 0        | 0          | 244     |
| 3              | -1           | 0        | 1          | 396     |
| 4              | -1           | 1        | 0          | 312     |
| 5              | 1            | 1        | 0          | 148     |
| 6              | 0            | 1        | -1         | 174     |
| 7              | 0            | -1       | 1          | 278     |
| 8              | 0            | -1       | 1          | 272     |
| 9              | 1            | 0        | -1         | 86      |
| 10             | 0            | 0        | 0          | 244     |
| 11             | -1           | 1        | 0          | 321     |
| 12             | -1           | 0        | -1         | 260     |
| 13             | 0            | 1        | 1          | 282     |
| 14             | 0            | 1        | -1         | 167     |
| 15             | 0            | 0        | 0          | 243     |
| 16             | -1           | -1       | 0          | 301     |
| 17             | -1           | -1       | 0          | 299     |
| 18             | 0            | -1       | -1         | 156     |
| 19             | 1            | -1       | 0          | 133     |
| 20             | 1            | 0        | -1         | 90      |
| 21             | -1           | 0        | -1         | 245     |
| 22             | 0            | 1        | 1          | 281     |
| 23             | -1           | 0        | 1          | 395     |
| 24             | 1            | 0        | 1          | 200     |
| 25             | 0            | -1       | -1         | 153     |
| 26             | 1            | -1       | 0          | 133     |
| 27             | 1            | 0        | 1          | 207     |
| 28             | 0            | 0        | 0          | 234     |
| 29             | 1            | 1        | 0          | 140     |
| 30             | 0            | 0        | 0          | 237     |



Obrázok 5.17: Bodový graf

### Analýza nameraných dát:

Pri analýze nameraných dát sa postupuje obdobne ako v predchádzajúcich prípadoch. Sledujú sa p-hodnoty jednotlivých veličín a ich vzájomných aj kvadratických interakcií. Postupné odstraňovanie štatisticky nevýznamných členov je uvedené v Prílohe C. Ďalej sú tiež vykreslené jednotlivé grafy odozvovej plochy aj grafy vrstevníc. V tomto modeli sú uvedené iba grafy závislosti dostrelu na faktoroch *A* a *B* pri meniacej sa hodnote faktoru *C*. Druhá závislosť už uvedená nie je, vychádza podobne ako v centrálnom kompozitnom modeli.

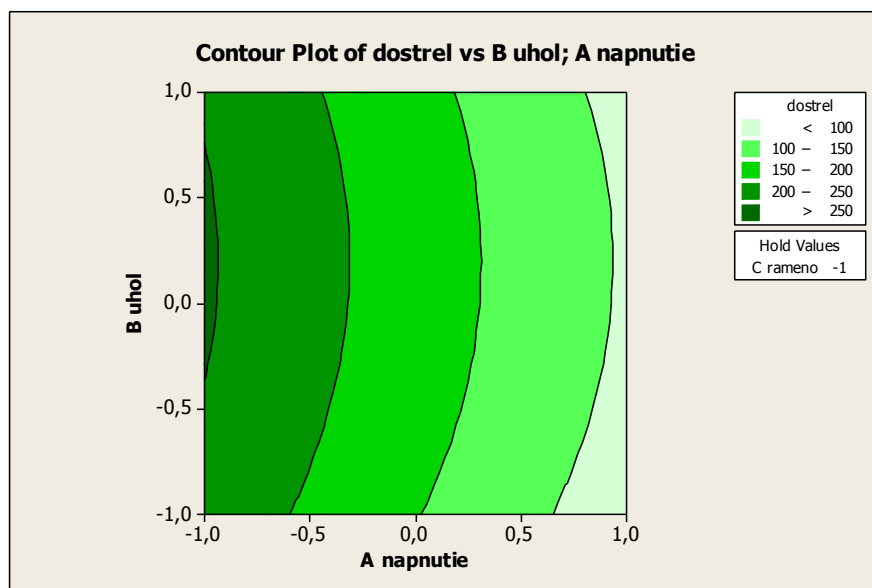
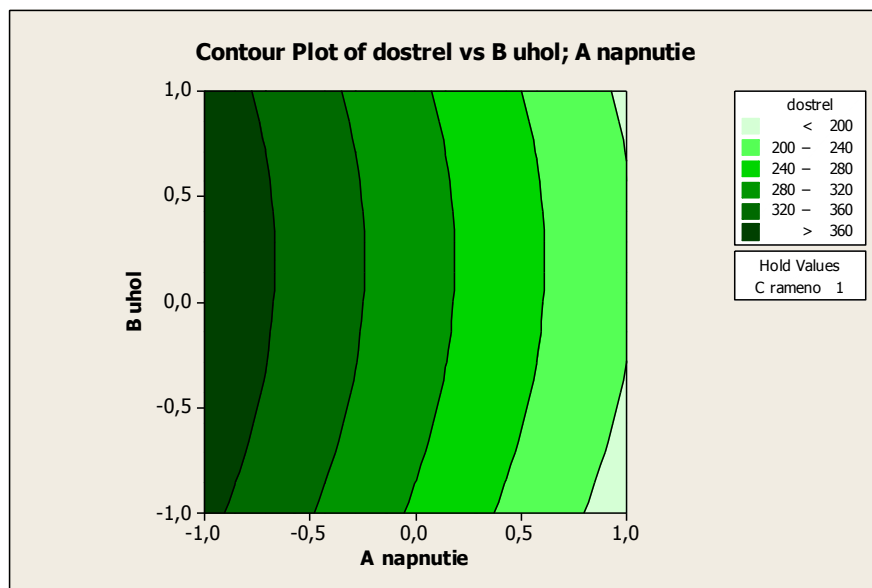
### Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                | Coef    | SE Coef | T       | P     |
|---------------------|---------|---------|---------|-------|
| Constant            | 239,923 | 1,868   | 128,445 | 0,000 |
| A napnutie          | -87,000 | 1,375   | -63,285 | 0,000 |
| B uhol              | 6,250   | 1,375   | 4,546   | 0,000 |
| C rameno            | 61,250  | 1,375   | 44,554  | 0,000 |
| B uhol*B uhol       | -15,865 | 2,018   | -7,864  | 0,000 |
| C rameno*C rameno   | -4,365  | 2,018   | -2,164  | 0,041 |
| A napnutie*C rameno | -6,875  | 1,944   | -3,536  | 0,002 |

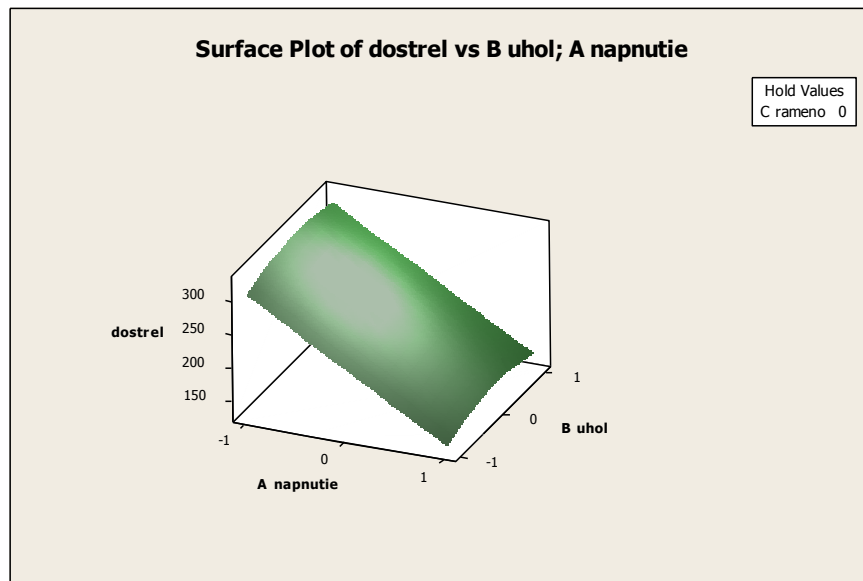
S = 5,49897      PRESS = 1301,95  
R-Sq = 99,62%    R-Sq(pred) = 99,30%    R-Sq(adj) = 99,53%

Obrázok 5.18: Response surface regression



Obrázok 5.19: Contour plot





Obrázok 5.20: Surface plot

### Interpretácia výsledkov:

Odpovedajúci regresný model pre tento experiment je:

$$\text{DOSTREL} = 239,923 - 87,000A + 6,250B + 61,250C - 15,865BB - 4,345CC - 6,875AC$$

Matematický model popisuje 99,62% variability. Podobnosť modelov centrálného kompozitného návrhu a Box-Behnkenovho návrhu bude ďalej vysvetlená v kapitole 5.4. Z výstupu na obrázku 5.18 je vidieť, že tak isto ako v centrálnom kompozitnom návrhu sú všetky faktory  $A$ ,  $B$ ,  $C$  štatisticky významné a tiež kvadratické interakcie  $BB$  a  $CC$ . Rozdiel nastáva v prípade interakcie faktorov, kde je významnou iba interakcia  $AC$ . Interakcia  $AB$ , ktorá bola v predchádzajúcom modeli významnou s hraničnou hodnotou 0,048 sa v tomto modeli Box-Behnkenovho návrhu už nevyskytuje.

## 5.4 Porovnanie návrhov experimentu

Na základe analýzy jednotlivých návrhov experimentu sú obdržané odpovedajúce regresné modely. V tejto kapitole sú použité 2 spôsoby ich porovnania. Prvým je porovnanie pomocou predikčného a konfidenčného intervalu, druhý pomocou optimalizéru odozvy.

### 5.4.1 Porovnanie pomocou predikčného a konfidenčného intervalu

Zobrazenie 95% predikčného intervalu predstavuje rozpätie pravdepodobných hodnôt pre nejaké pozorovanie, nastavenie. Na rozdiel od konfidenčného intervalu, ktorý reprezentuje rozsah možných hodnôt pre strednú odozvu, je predikčný interval širší. [7] V literatúre sa tiež definuje predikčný interval ako interval spoľahlivosti pre individuálne hodnoty a konfidenčný interval ako interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

Do tabuľky 5.4 sú vybrané všetky možné kombinácie nastavenia úrovni faktorov, ktoré sú použité v oboch návrhoch. To znamená: 8 nastavení vo faktorových bodoch, 6 nastavení v axiálnych bodoch, 12 nastavení v bodoch Box-Behnkenovho návrhu a 1 nastavenie pre centrálny bod, celkom spolu 27. Pre tieto nastavenia sú určené bodové odhady dostrelu a k nim sú pomocou MINITABU vypočítané ich 95% predikčné intervaly možnej hodnoty dostrelu loptičky. V tabuľke sú bodové odhady vyznačené v prvom stĺpci príslušného modelu. Sú k nim vyznačené dolné a horné hodnoty predikčného intervalu. Porovnanie dvoch modelov experimentu je znázornené pomocou koeficientu  $\delta$ , ktorý v absolútnej hodnote vyjadruje rozdiel bodových odhadov. Je uvedený v poslednom stĺpci tabuľky. Môžeme sledovať, že pre oba návrhy experimentu sa tieto intervaly vo všetkých nastaveniach prekrývajú,  $\delta$  ukazuje rozdiel, ktorý v žiadnom pozorovaní nie je štatisticky významný. Na základe toho je možné zhodnotiť, že aj keď vyšli regresné modely návrhov rôzne, tak dobre a dokonca aj podobne modelujú dostrel loptičky z katapultu.

Tabuľka 5.4: Porovnanie pomocou predikčného intervalu

| Faktor |    |    | Centrálny kompozitný návrh |       |       | Box - Behnkenov návrh |       |       | Porovnanie |
|--------|----|----|----------------------------|-------|-------|-----------------------|-------|-------|------------|
| A      | B  | C  | Odhad                      | Dolná | Horná | Odhad                 | Dolná | Horná | $ \delta $ |
| 0      | 0  | 0  | 240,5                      | 230,4 | 250,6 | 240,5                 | 230,0 | 250,9 | 0          |
| -1     | -1 | -1 | 234,5                      | 223,7 | 245,3 | 236,1                 | 225,0 | 247,2 | 1,6        |
| 1      | -1 | -1 | 75,2                       | 64,4  | 86,0  | 73,5                  | 62,4  | 84,6  | 1,7        |
| -1     | 1  | -1 | 252,2                      | 241,4 | 263,0 | 250,5                 | 239,4 | 261,6 | 1,7        |
| 1      | 1  | -1 | 86,2                       | 75,4  | 97,0  | 87,8                  | 76,7  | 98,9  | 1,6        |
| -1     | -1 | 1  | 363,5                      | 352,7 | 374,3 | 365,1                 | 354,0 | 376,2 | 1,6        |
| 1      | -1 | 1  | 184,2                      | 173,4 | 195,0 | 182,5                 | 171,4 | 193,6 | 1,7        |
| -1     | 1  | 1  | 381,2                      | 370,4 | 392,0 | 379,5                 | 368,4 | 390,6 | 1,7        |
| 1      | 1  | 1  | 195,2                      | 184,4 | 206,0 | 196,8                 | 185,7 | 207,9 | 1,6        |
| 1      | 0  | 0  | 154,2                      | 143,9 | 164,4 | 154,2                 | 143,6 | 164,7 | 0          |
| -1     | 0  | 0  | 326,8                      | 316,5 | 337,0 | 326,8                 | 316,2 | 337,3 | 0          |
| 0      | 1  | 0  | 232,7                      | 222,4 | 243,0 | 232,7                 | 222,0 | 243,4 | 0          |
| 0      | -1 | 0  | 218,4                      | 208,1 | 228,7 | 218,3                 | 207,6 | 229,0 | 0,1        |
| 0      | 0  | 1  | 296,0                      | 285,6 | 306,3 | 295,9                 | 285,2 | 306,6 | 0,1        |
| 0      | 0  | -1 | 177,0                      | 166,6 | 187,3 | 176,9                 | 166,2 | 187,6 | 0,1        |
| 1      | 1  | 0  | 144,8                      | 134,1 | 155,4 | 146,4                 | 135,5 | 157,2 | 1,6        |
| -1     | 1  | 0  | 320,8                      | 310,1 | 331,4 | 319,0                 | 308,2 | 329,8 | 1,8        |
| 1      | -1 | 0  | 133,8                      | 123,1 | 144,4 | 132,0                 | 121,2 | 142,8 | 1,8        |
| -1     | -1 | 0  | 303,1                      | 292,4 | 313,7 | 304,7                 | 293,8 | 315,5 | 1,6        |
| 1      | 0  | 1  | 204,7                      | 194,0 | 215,3 | 204,6                 | 193,6 | 215,6 | 0,1        |
| -1     | 0  | 1  | 387,3                      | 376,6 | 397,9 | 387,2                 | 376,2 | 398,2 | 0,1        |
| 1      | 0  | -1 | 95,7                       | 85,0  | 106,3 | 95,8                  | 84,6  | 107,0 | 0,1        |
| -1     | 0  | -1 | 258,3                      | 247,6 | 268,9 | 258,2                 | 247,2 | 269,2 | 0,1        |
| 0      | 1  | 1  | 288,2                      | 277,9 | 298,5 | 288,2                 | 277,4 | 298,9 | 0          |
| 0      | -1 | 1  | 273,8                      | 263,5 | 284,1 | 273,8                 | 263,0 | 284,5 | 0          |
| 0      | 1  | -1 | 169,2                      | 158,9 | 179,5 | 169,2                 | 158,4 | 179,9 | 0          |
| 0      | -1 | -1 | 154,8                      | 144,5 | 165,1 | 154,8                 | 144,0 | 165,5 | 0          |

Podobne ako v predchádzajúcom prípade sa do tabuľky 5.5 znázorní všetkých 27 kombinácií nastavení úrovni faktorov z oboch návrhov. Opäť sa pomocou MINITABU vypočítajú bodové odhady strednej hodnoty a ich príslušné horné a dolné hodnoty v tomto prípade 95% konfidenčného intervalu. Konfidenčný interval je prísnejším intervalom než predikčný, keďže zobrazuje interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu. Pre prehľadnosť, že intervaly sa vo všetkých nastaveniach prekrývajú, je opäť určený rozdiel  $\delta$ , ktorý v žiadnom pozorovaní nie je štatisticky významný. Ak sa porovnávajú 2 modely, ako je to v tomto prípade modelovania dostrelu, tak je vhodnejšie použiť predikčný interval.

Tabuľka 5.5: Porovnanie pomocou 95% konfidenčného intervalu

| Faktor |    |    | Centrálny kompozitný návrh |       |       | Box - Behnkenov návrh |       |       | Porovnanie |
|--------|----|----|----------------------------|-------|-------|-----------------------|-------|-------|------------|
| A      | B  | C  | Odhad                      | Dolná | Horná | Odhad                 | Dolná | Horná | $ \delta $ |
| 0      | 0  | 0  | 240,5                      | 238,2 | 242,8 | 240,4                 | 237,9 | 242,9 | 0          |
| -1     | -1 | -1 | 234,5                      | 230,0 | 239,0 | 236,1                 | 231,5 | 240,7 | 1,6        |
| 1      | -1 | -1 | 75,2                       | 70,7  | 79,7  | 73,5                  | 68,9  | 78,0  | 1,7        |
| -1     | 1  | -1 | 252,2                      | 247,7 | 256,7 | 250,5                 | 245,9 | 255,0 | 1,7        |
| 1      | 1  | -1 | 86,2                       | 81,7  | 90,7  | 87,8                  | 83,2  | 92,4  | 1,6        |
| -1     | -1 | 1  | 363,5                      | 359,0 | 368,0 | 365,1                 | 360,5 | 369,7 | 1,6        |
| 1      | -1 | 1  | 184,2                      | 179,7 | 188,7 | 182,5                 | 177,9 | 187,0 | 1,7        |
| -1     | 1  | 1  | 381,2                      | 376,7 | 385,7 | 379,5                 | 374,9 | 384,0 | 1,7        |
| 1      | 1  | 1  | 195,2                      | 190,7 | 199,7 | 196,8                 | 192,2 | 201,4 | 1,6        |
| 1      | 0  | 0  | 154,2                      | 151,3 | 157,0 | 154,2                 | 151,1 | 157,2 | 0          |
| -1     | 0  | 0  | 326,8                      | 323,9 | 329,7 | 326,8                 | 323,7 | 329,8 | 0          |
| 0      | 1  | 0  | 232,7                      | 229,6 | 235,8 | 232,7                 | 229,2 | 236,1 | 0          |
| 0      | -1 | 0  | 218,4                      | 215,3 | 221,4 | 218,3                 | 214,9 | 221,8 | 0,1        |
| 0      | 0  | 1  | 296,0                      | 292,9 | 299,0 | 295,9                 | 292,5 | 299,3 | 0,1        |
| 0      | 0  | -1 | 177,0                      | 173,9 | 180,0 | 176,9                 | 173,5 | 180,3 | 0,1        |
| 1      | 1  | 0  | 144,8                      | 140,7 | 148,8 | 146,4                 | 142,5 | 150,2 | 1,6        |
| -1     | 1  | 0  | 320,8                      | 316,7 | 324,8 | 319,0                 | 315,1 | 322,9 | 1,8        |
| 1      | -1 | 0  | 133,8                      | 129,7 | 137,8 | 132,0                 | 128,1 | 135,9 | 1,8        |
| -1     | -1 | 0  | 303,1                      | 299,0 | 307,1 | 304,7                 | 300,8 | 308,5 | 1,6        |
| 1      | 0  | 1  | 204,7                      | 200,6 | 208,7 | 204,6                 | 200,2 | 208,9 | 0,1        |
| -1     | 0  | 1  | 387,3                      | 383,2 | 391,3 | 387,2                 | 382,8 | 391,6 | 0,1        |
| 1      | 0  | -1 | 95,7                       | 91,6  | 99,7  | 95,8                  | 91,2  | 99,9  | 0,1        |
| -1     | 0  | -1 | 258,3                      | 254,2 | 262,3 | 258,2                 | 253,8 | 262,6 | 0,1        |
| 0      | 1  | 1  | 288,2                      | 285,2 | 291,2 | 288,2                 | 277,4 | 298,9 | 0          |
| 0      | -1 | 1  | 273,8                      | 270,8 | 276,9 | 273,8                 | 270,1 | 277,5 | 0          |
| 0      | 1  | -1 | 169,2                      | 166,2 | 172,2 | 169,2                 | 165,4 | 172,8 | 0          |
| 0      | -1 | -1 | 154,8                      | 151,8 | 157,9 | 154,8                 | 151,1 | 158,5 | 0          |

### 5.4.2 Porovnanie pomocou optimalizácie odozvy

Optimalizátor odozvy pomôže určiť kombináciu rôznych nastavení, ktoré spoločne optimalizujú odozvu, prípadne viac odoziev. Je to veľmi užitočné v prípade, ak sa vyhodnocuje vplyv rôznych premenných na odozvu.

Optimalizácia sa vykonáva na základe týchto cieľových požiadaviek:

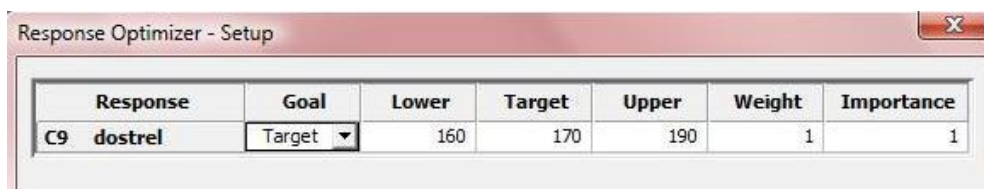
1. minimalizovanie odozvy
2. maximalizovanie odozvy
3. zameranie sa na konkrétnu hodnotu odozvy

Pred tým, než sa použije optimalizátor odozvy, je potrebné mať hotový model. To znamená, že musia byť odstránené štatisticky nevýznamné faktory. S týmto modelom potom optimalizátor pracuje, preberá z neho potrebné informácie a nepotrebuje používať všetky dáta z tabuľky pracovného okna. [7]

Aby bolo možné porovnať centrálny kompozitný návrh s Box-Behnkenovým návrhom pomocou optimalizátoru odozvy, je nutné zadať konkrétnu úlohu, ktorá sa bude optimalizovať:

**Úloha:** *Je k dispozícii katapult a cieľom je dobytie nepriateľského hradu, ktorý je vzdialený približne 170 jednotiek dĺžky od miesta, na ktorom je umiestnený katapult. Podarí sa útočiacemu zvíťaziť, aj keď trafi miesto vo vzdialenostnej tolerancii od 160 do 190? Aké majú byť optimálne nastavenia pre katapult? Do akej miery budú tieto nastavenia vhodné?*

Nastavenia z úlohy sa zadávajú do MINITABU, ako je uvedené na obrázku 5.21. Z cieľových požiadaviek (goal) sa vyberie tretia možnosť, ktorou je zameranie sa na konkrétnu hodnotu (target value). Okrem týchto alternatív nastavenia program ponúka aj možnosti optimalizovania viacerých odoziev. Prípadne sa dajú nastaviť aj váhy prislúchajúce jednotlivým odozvám. V tomto prípade sú použité iba základné nastavenia, čo pre jednoduchú analýzu postačuje.

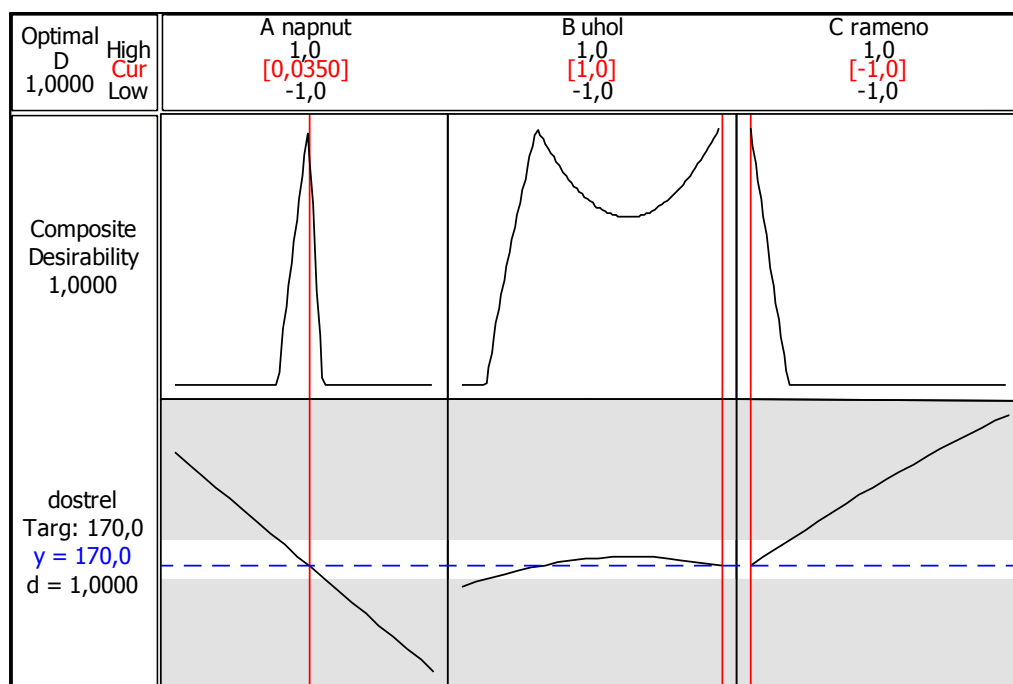


Obrázok 5.21: optimalizér odozvy (response optimizer)

Po vložení uvedených hodnôt z úlohy do MINITABU a vykreslení výsledkov/výstupov, je možné sledovať nielen grafické znázornenie, ale aj vhodnosť nastavení.

Individuálna vhodnosť (individual desirability) a celková vhodnosť (composite desirability) určujú alebo posudzujú, ako dobre kombinácia nastavení premenných spĺňa požiadavky, ktoré sú nadefinované. Individuálna vhodnosť  $d$  vyhodnotí, ako uvedené nastavenie

optimalizuje jednu odozvu, celková vhodnosť  $D$  vyhodnotí, ako uvedené nastavenie optimalizuje skupinu odoziev celkovo v prípade ak je potrebné optimalizovať viac odoziev naraz. Rozsah uvedenej vhodnosti je od 0 do 1, kde 1 predstavuje ideálny prípad a 0 znamená, že jedna alebo viac odoziev sú mimo uvedených tolerancií.

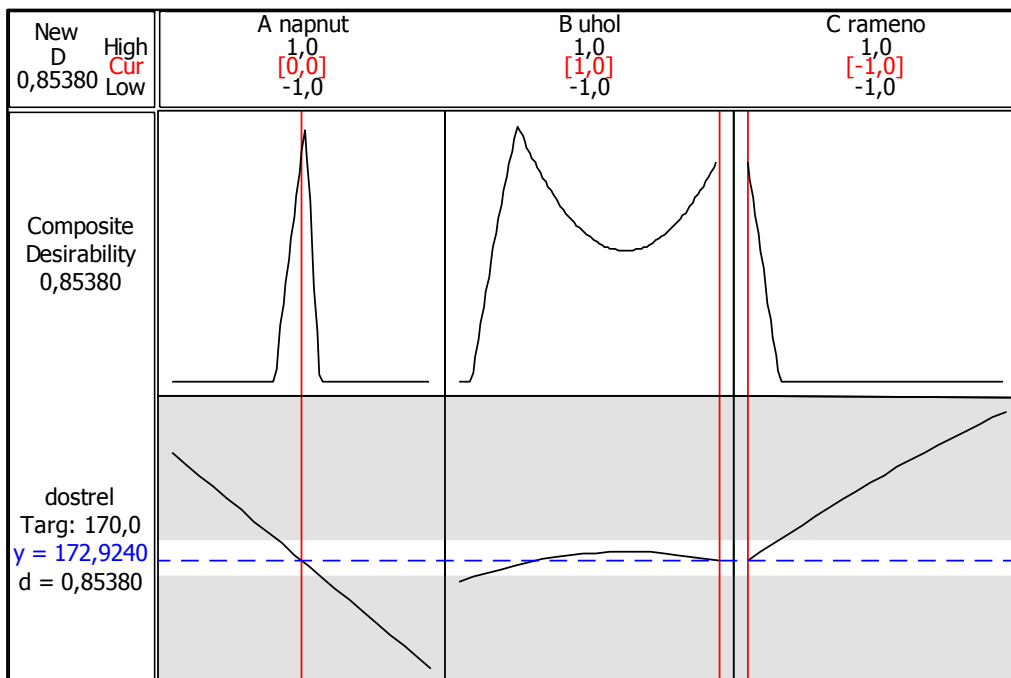


Obrázok 5.22: Výstup bez úpravy (centrálny kompozitný návrh)

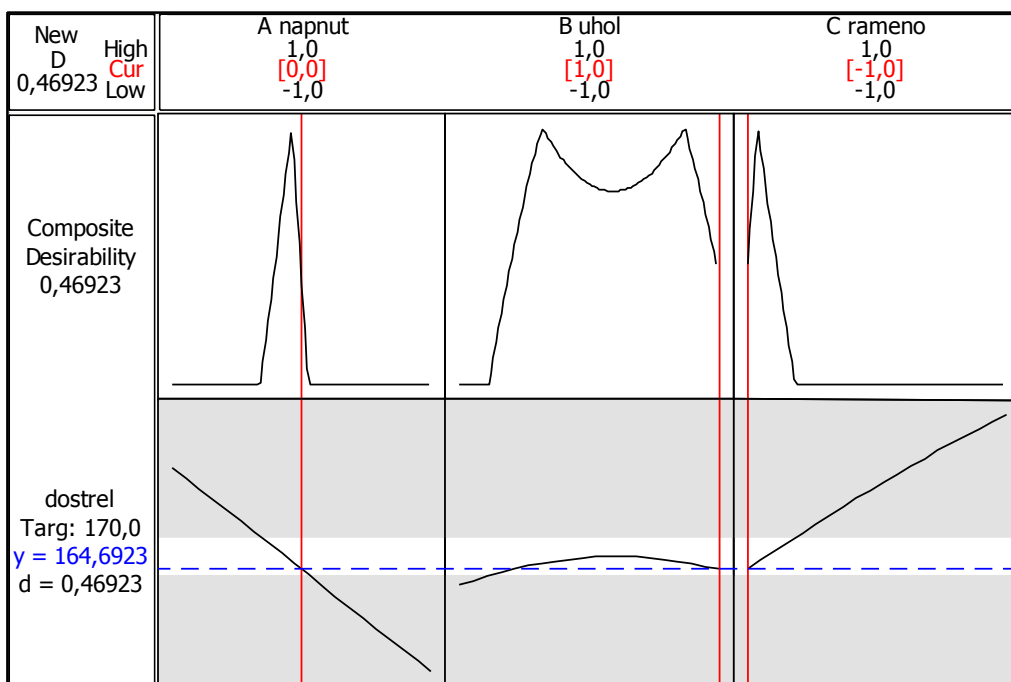
V prvom výstupe na obrázku 5.22 je určené presné nastavenie faktorov s vhodnosťou 1 bez úprav. Je potrebné si uvedomiť, že nastavenia faktorov katapultu pre uvedenú úlohu sú diskrétna a tým pádom nie je možné faktor  $A$  nastaviť na hodnotu 0,0350 ako uvádza MINITAB. Zmenením tejto hodnoty na najbližšiu možnú diskretnú, faktor  $A$  bude nastavený na úroveň 0. Tým sa posunie výsledok zásahu zo 170 na 172,9420 ako ukazuje obrázok 5.23 a zníži sa tým aj vhodnosť na 0,8538. Uvedené hodnoty popisujú centrálny kompozitný návrh. Pomocou tých istých nastavení sa optimalizuje dostrel aj pre Box-Behnkenov návrh na obrázku 5.24. Ak sa zmenia opäť všetky hodnoty na diskrétna, posunie sa výsledok zásahu až na 164,6923 a vhodnosť tohto nastavenia na hodnotu 0,46923. Z tohto by sa dalo usúdiť, že lepším modelom pre nastavenie úlohy je regresný model centrálného kompozitného návrhu.

Na tomto mieste je vhodné zodpovedať ešte jednu dôležitú otázku. *Čo ak existujú nejaké iné nastavenia faktorov danej úlohy, ktoré by ešte lepšie optimalizovali dostrel?* Je tým myslené, že pomocou MINITABU boli nastavené najbližšie možné diskrétna hodnoty odpovedajúce úlohe. Môže sa ale stať, že iná, vhodnejšia možnosť bude prehliadnutá. Preto sú v ďalšej časti znázornené vrstevnicové grafy závislosti dostrelu na faktoroch  $A$  a  $B$  spolu s meniacim sa faktorom  $C$  v 3 rôznych úrovniach. V tomto prípade sú tieto vrstevnice uvedené s konkrétnymi hodnotami dostrelu. Je teda znázornená oblasť ohraňovaná hodnotami 160, 170 a 190. Z grafu sa dá potom jednoducho odhadnúť požadované

diskrétné nastavenie, ktoré by sa mohlo javiť ako optimálne. Pre toto zadanie nastavenie faktorov je následne pomocou optimalizátoru dopočítaná vhodnosť. Hľadajú sa také nastavenia, ktoré budú mať vyššiu vhodnosť ako v prípade na obrázkoch 5.23 a 5.24. Analýzy a zhodnotenia sú vykonané pre oba modely metódy odozvoyých plôch.

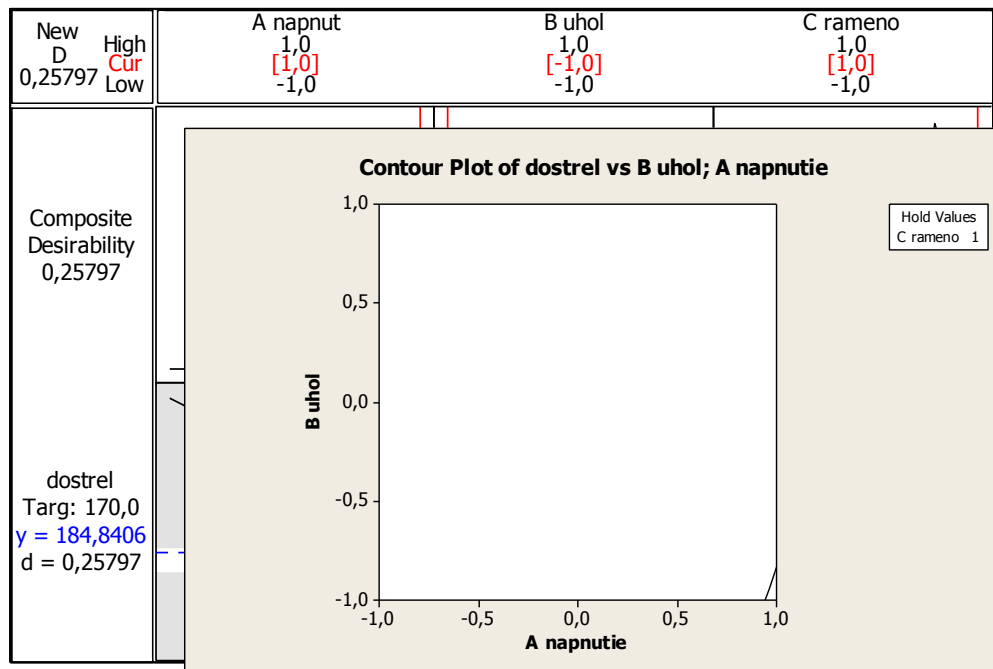


Obrázok 5.23: Výstup po úprave (centrálny kompozitný návrh)

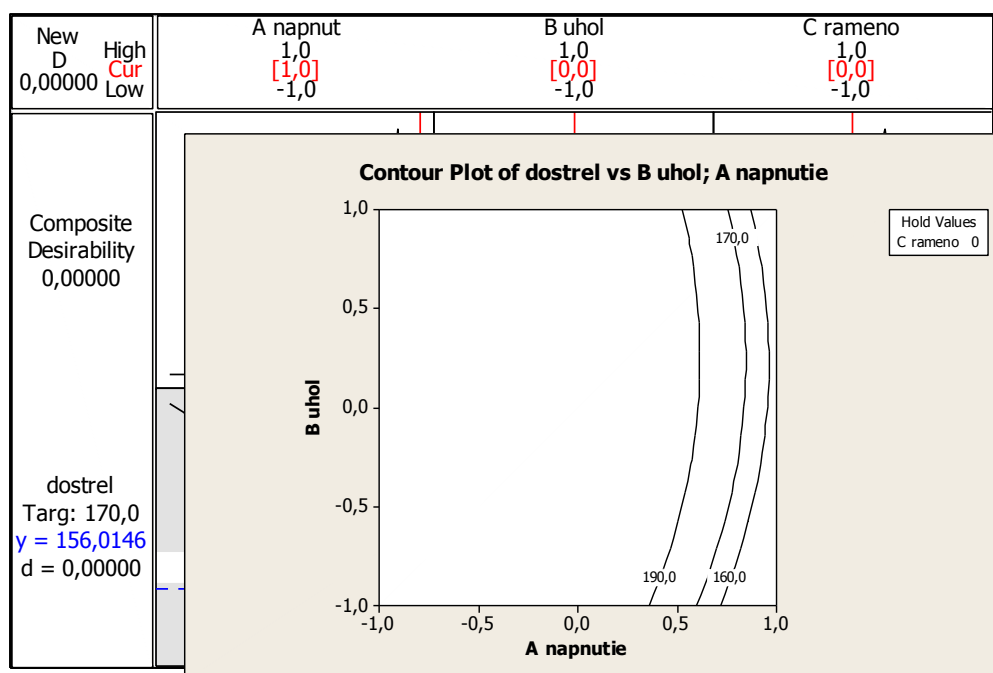


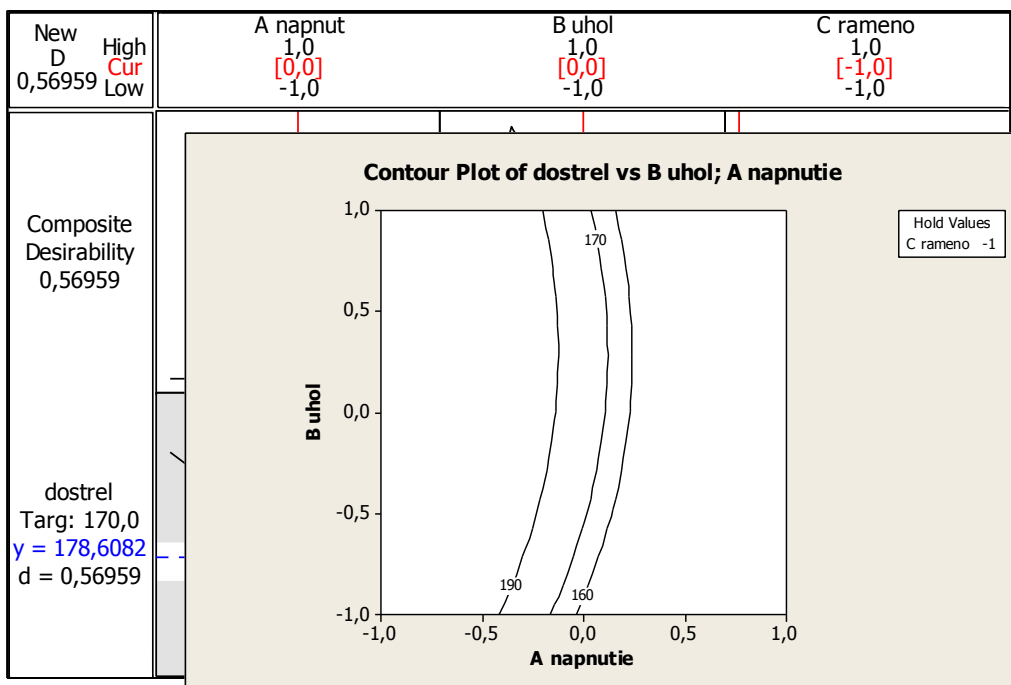
Obrázok 5.24: Výstup po úprave (Box-Behnkenov návrh)

## Nastavenia pre centrálny kompozitný návrh:



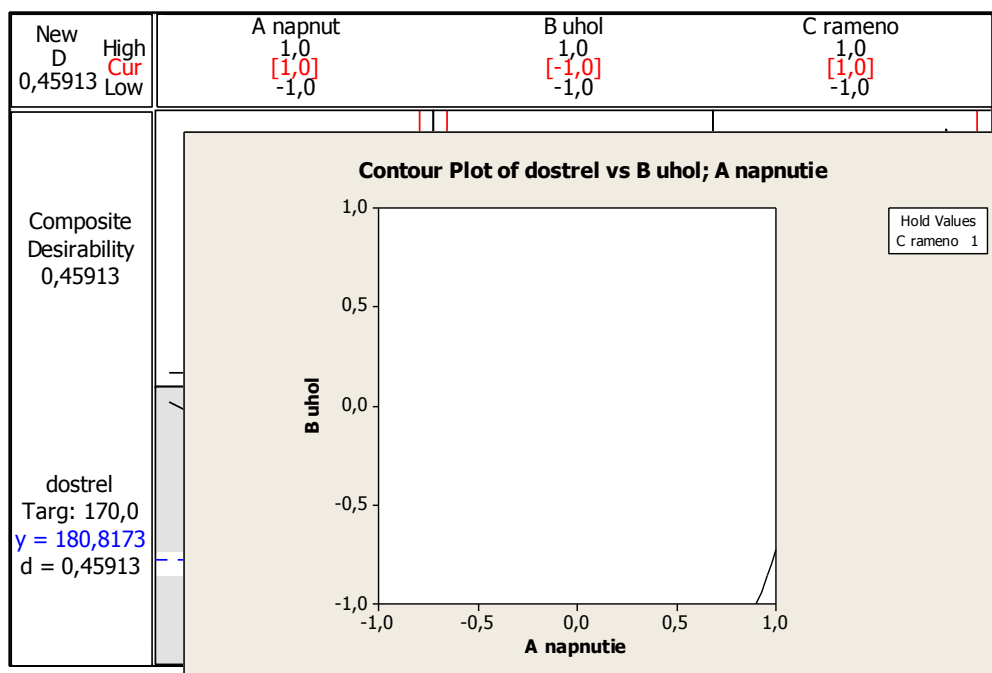
Vrstevnicový graf na vyššie uvedenom obrázku ukazuje, že jedinou možnosťou je nasledovné nastavenie katapultu: napnutie na úroveň 1, uhol na úroveň  $-1$  a rameno na úroveň 1 (skrátene  $[1, -1, 1]$ ). Zadaním týchto hodnôt do optimalizéru odozvy sa dá vidieť, že vhodnosť tohto nastavenia je 0,25797. Je to hodnota nižšia ako v prípade na obrázku 5.23. Nastavenie napnutia na ďalšom obrázku nie je pre diskrétné hodnoty v rozmedzí 0 a 1 možné. Preto vhodnosť nastavenia bude pre tento prípad nulová.



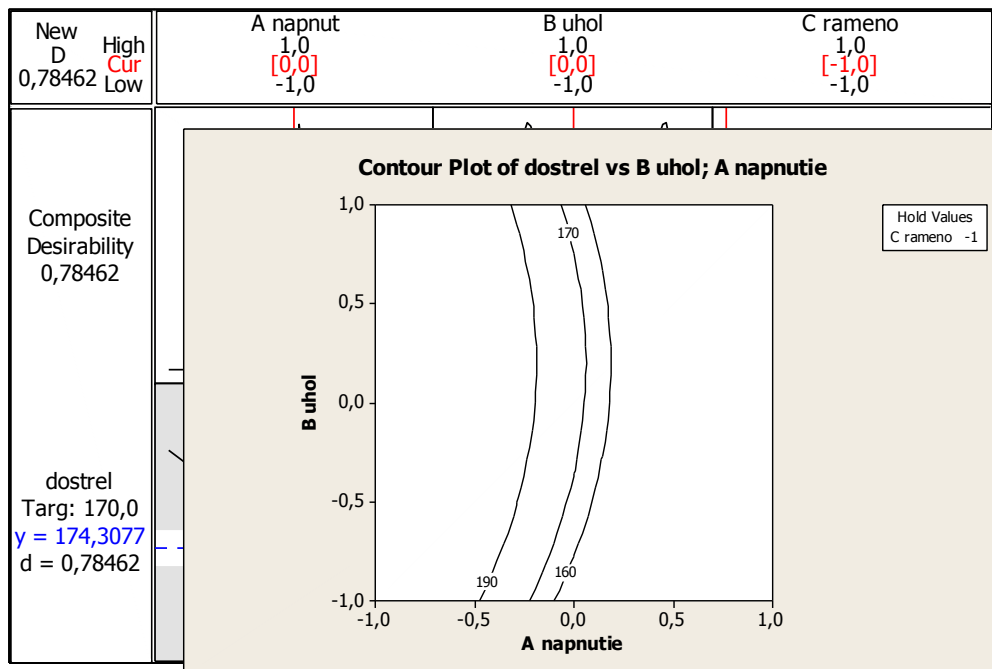
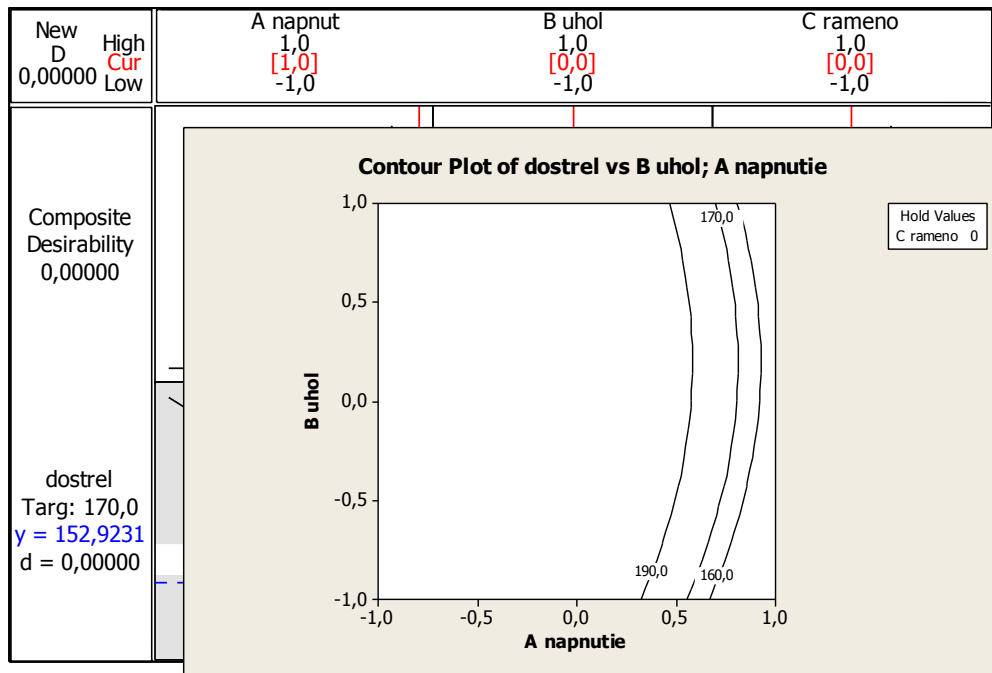


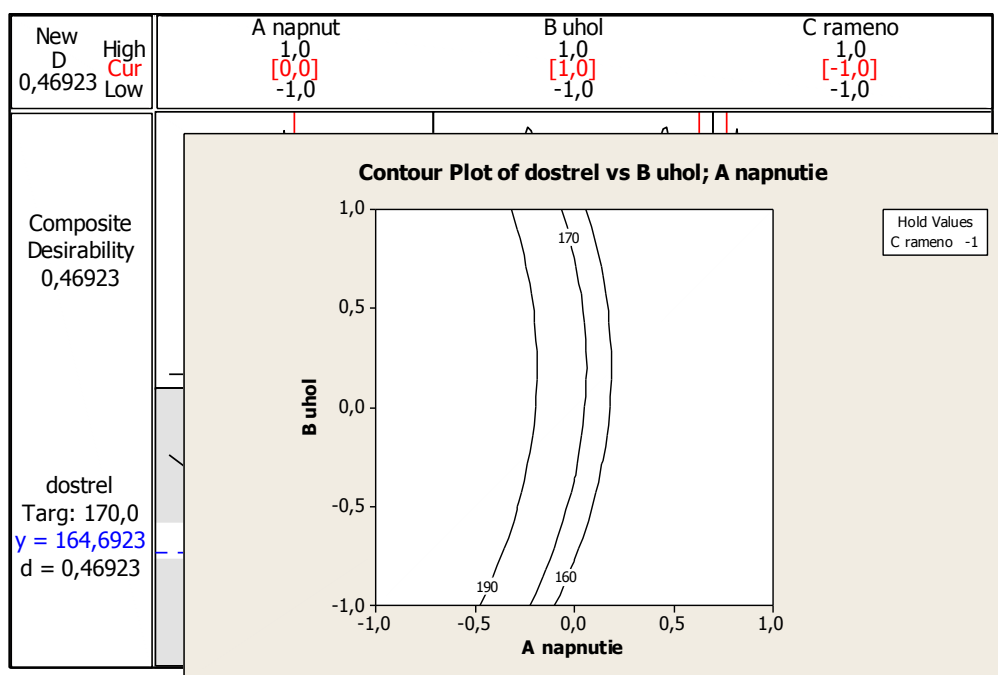
Rovnako sa postupuje aj v nasledujúcom prípade. Tu sú ponúkané hneď dve možné nastavenia pre faktory  $[A, B, C]$  :  $[0, 1, -1]$  a  $[0, 0, -1]$  . Prvá možnosť je totožná s nastavením na obrázku 5.23 a vhodnosť druhého nastavenia aj tak nedáva lepšiu hodnotu. Tým je možné vysloviť záver, že najvhodnejším nastavením (s vhodnosťou 0,8538) je prvé nastavenie  $[0, 1, -1]$  .

### Nastavenia pre Box-Behnkenov návrh:









Ako už bolo uvedené v kapitole 5.3, vrstevnicové grafy sa zobrazujú v oboch modeloch metódy odozvoových plôch približne rovnako. Práve z tohoto dôvodu v uvedenej úlohe vychádzajú rovnaké možnosti nastavenia faktorov  $[A, B, C]$  katapultu. Rozdielnou je vypočítaná vhodnosť týchto nastavení. Pre lepšiu názornosť sú hodnoty vhodností ešte raz zobrazené do tabuľky 5.4.2

Tabuľka 5.6: Porovnanie vhodností pre oba návrhy experimentu

| Faktor |    |    | Vhodnosť nastavenia        |                     |
|--------|----|----|----------------------------|---------------------|
| A      | B  | C  | Centrálny kompozitný návrh | Box-Behnkenov návrh |
| 1      | -1 | 1  | 0,26                       | 0,46                |
| 1      | 0  | 0  | 0                          | 0                   |
| 0      | 0  | -1 | 0,57                       | 0,78                |
| 0      | 1  | -1 | 0,85                       | 0,47                |

Pozoruhodným je v tomto prípade nastavenie  $[0, 0, -1]$  pre Box-Behnkenov návrh. To je práve ten očakávaný prípad, kedy sa zistilo, že iné nastavenie ako z obrázku 5.24 je vhodnejšie. Výsledok ale nedáva lepšiu hodnotu ako centrálny kompozitný návrh. Z tohto sa teda celkovo môže usúdiť, že lepším modelom pre konkrétne nastavenie z úlohy je regresný model centrálneho kompozitného návrhu. Je to ale veľmi individuálne. Ak by bola požadovaná optimalizácia iných nastavení, mohol by byť na druhej strane lepší model Box-Behnkenovho návrhu. Veľmi teda záleží na vopred zadaných hodnotách nastavenia. Nevýhodou použitia tohto optimalizéru je, že je vhodný skôr pre spojité veličiny. Pre diskkrétne veličiny, akým je tento prípad, dochádza k obmedzeniu nastavenia práve na tieto body.

## 6 Záver

Cieľom práce bolo zoznámenie sa so základnými princípmi a pokynmi pri plánovaní experimentu a predovšetkým priblíženie rôznych typov návrhov, ktoré boli ďalej uplatnené pri realizácii praktickej úlohy. Tá sa venovala modelovaniu dostrelu loptičky z katapultu. Pre analýzu plánovaného experimentu je možné použiť celú radu nástrojov. V kapitole 3 bol popísaný faktorový návrh. V praktickej časti, ktorej sa venovala kapitola 5, sa používal úplný  $2^3$  faktorový experiment. Kapitola 4 bola zameraná na metódy odozgových plôch, konkrétnejšie na centrálny kompozitný návrh a Box-Behnkenov návrh experimentu. Centrálny kompozitný návrh je rozšírením faktorového návrhu, Box-Behnkenov návrh je kompaktný. Používajú sa v okamžiku, ak v modeli vychádza významné zakrivenie. Veľkou výhodou Box-Behnkenovho návrhu je, že potrebuje menej meraní ako centrálny kompozitný návrh. Musí sa ale vykonať celý, nestačí použiť body z faktorovej časti.

Požadovaným cieľom plánovaného experimentu bolo pomocou štatistického softvéru MINITAB určiť významnosť jednotlivých faktorov a ich interakcií. Týmto faktormi boli nastavenia uhla, napnutia a ramena katapultu a typ loptičky. Praktická časť diplomovej práce začínala popisom týchto faktorov a ich úrovní. Následne boli pomocou znáhodnenia vygenerované nastavenia pre všetky možné kombinácie úrovní faktorov. Na základe týchto nastavení boli namerané hodnoty dostrelu loptičky z katapultu. Boli vykonané tri plánované experimenty pre tri rôzne typy návrhov. Ďalej bola overená štatistická významnosť faktorov a ich interakcií a pomocou toho mohli byť zostrojené odpovedajúce regresné modely.

Pri realizácii faktorového návrhu experimentu bol zistený vplyv kvadratického člena na výstup. Tým bol získaný model, ktorý dostatočne neodpovedal realite. Preto bolo nutné pristúpiť k modelovaniu dostrelu pomocou metód odozgových plôch a to pomocou centrálného kompozitného návrhu a Box-Behnkenovho návrhu. Ako ukazujú grafické výstupy a tiež aj odpovedajúce regresné modely, obsahujú tieto dva rôzne typy návrhov experimentov približne rovnaké faktory a interakcie. Rozdiel v modeloch nastal v prítomnosti jedného člena interakcie.

Po tom, čo bol model faktorového experimentu označený za nedostatočný, porovnanie modelov bolo vykonané iba pre dva zvyšné návrhy. V prvom kroku boli porovnané predikčné a konfidenčné intervaly. Bolo tiež zistené, že najväčšia výchylka odhadov je  $2\text{ cm}$ . Dá sa povedať, že táto hodnota je pri celkovom rozpätí dostrelu katapultu, ktoré bolo približne od  $80\text{ cm}$  do  $360\text{ cm}$ , značne nízka. Preto je možné zhodnotiť, že uvedené návrhy modelovali skoro totožne dostrel. Ďalším krokom bolo porovnanie návrhov pomocou optimalizácie odozvy, kde bola zadaná modelová úloha. Bol požadovaný dostrel do konkrétneho miesta s určitou vzdialenostnou toleranciou. Na základe vypočítanej vhodnosti nastavenia sa lepšie podarilo diskretizovať regresný model centrálného kompozitného návrhu experimentu. To ale neznamená, že pre inú, pevne zvolenú vzdialenosť, by regresný model Box-Behnkenovho návrhu experimentu nemohol poskytnúť lepšie výsledky.



# Zoznam použitých zdrojov a literatúry

- [1] ANDĚL, J.: *Základy matematické statistiky*. Praha: MATFYZPRESS, 2005. 360 s. ISBN 978-80-7378-162-0.
- [2] ANTHONY, J.: *Design of Experiments for Engineers and Scientist*, Oxford: Elsevier Science and Technology Books, 2003. 176 p. ISBN 075047094.
- [3] ČSN ISO 3534-3. Slovník a Značky - Část: *Navrhování experimentu*. Praha: Český normalizační institut, 2001. 52 s.
- [4] DEAN, A., DEAN, A.M., VOSS, D.: *Design and Analysis of Experiments*. USA: Springer, 1998. 763 p. ISBN 9780387985619.
- [5] KARPÍŠEK, Z., POPELA, P. a BEDNÁŘ, J.: Regresní analýza. V *Statistika a pravděpodobnost – přehled vzorců a poznatků*. Brno: FSI VUT CERM, 2002, s. 34-37.
- [6] MILLER, I.: *Návrh a analýza experimentu s pomocí MINITAB*. Praha: Interquality, 2010. 122 s. ISBN 978-80-902770-5-2.
- [7] MINITAB User's Guide 2: *Data Analysis and Quality tools*. USA, 2000. 937 s. ISBN 0-925636-44-4
- [8] MONTGOMERY, D.C.: *Design and Analysis of Experiments*. USA, 2001. 5th edition, 684 p. ISBN 0-471-31649-0.
- [9] TOŠENOVSKÝ, J. a NOSKIEVIČOVÁ, D.: Plánování experimentů. V *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Ostrava: MONTANEX a.s., 2000, s. 71-118. ISBN 80-7225-040-X.
- [10] NCMR Company. *Pad Replacement Instructions*. [online]. [cit. 2015-04-27]. Dostupné z: [http://www.ncmrcompany.com/catapult\\_pad\\_instructions.asp](http://www.ncmrcompany.com/catapult_pad_instructions.asp)



# Zoznam príloh

Príloha A      Faktorový návrh

Príloha B      Centrálny kompozitný návrh

Príloha C      Box-Behnkenov návrh





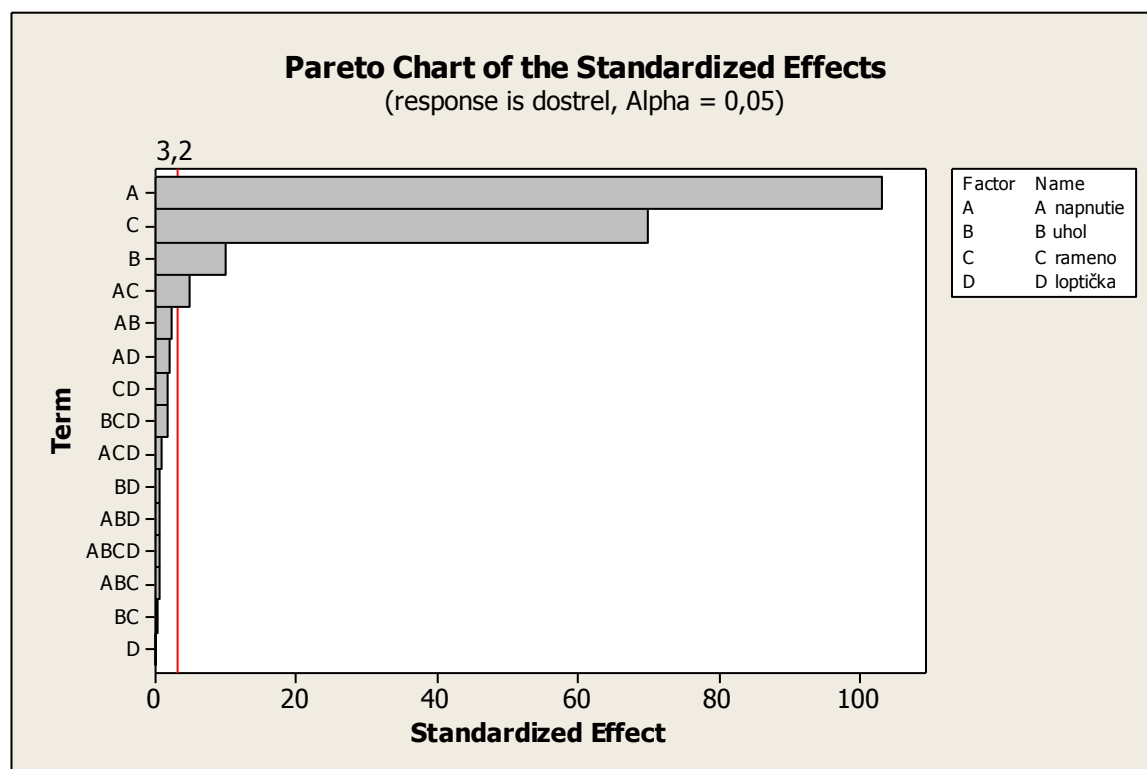
# Príloha A

## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term  | Effect  | Coef   | SE Coef | T       | P     |
|---|---------|--------|---------|---------|-------|
| Constant                                    |         | 223,31 | 0,8306  | 268,87  | 0,000 |
| A napnutie                                  | -171,12 | -85,56 | 0,8306  | -103,02 | 0,000 |
| B uhol                                      | 16,63   | 8,31   | 0,8306  | 10,01   | 0,002 |
| C rameno                                    | 116,13  | 58,06  | 0,8306  | 69,91   | 0,000 |
| D loptička                                  | 0,20    | 0,10   | 0,7429  | 0,13    | 0,901 |
| A napnutie*B uhol                           | -3,62   | -1,81  | 0,8306  | -2,18   | 0,117 |
| A napnutie*C rameno                         | -8,12   | -4,06  | 0,8306  | -4,89   | 0,016 |
| A napnutie*D loptička                       | -3,13   | -1,56  | 0,8306  | -1,88   | 0,157 |
| B uhol*C rameno                             | -0,37   | -0,19  | 0,8306  | -0,23   | 0,836 |
| B uhol*D loptička                           | 1,13    | 0,56   | 0,8306  | 0,68    | 0,547 |
| C rameno*D loptička                         | 2,62    | 1,31   | 0,8306  | 1,58    | 0,212 |
| A napnutie*B uhol*C rameno                  | 0,87    | 0,44   | 0,8306  | 0,53    | 0,635 |
| A napnutie*B uhol*D loptička                | -1,12   | -0,56  | 0,8306  | -0,68   | 0,547 |
| A napnutie*C rameno*D loptička              | -1,62   | -0,81  | 0,8306  | -0,98   | 0,400 |
| B uhol*C rameno*D loptička                  | 2,62    | 1,31   | 0,8306  | 1,58    | 0,212 |
| A napnutie*B uhol*C rameno*<br>+ D loptička | 0,88    | 0,44   | 0,8306  | 0,53    | 0,635 |
| Ct Pt                                       |         | 19,44  | 1,8572  | 10,47   | 0,002 |

S = 3,32227      PRESS = 10423,0  
R-Sq = 99,98%      R-Sq(pred) = 94,00%      R-Sq(adj) = 99,88%

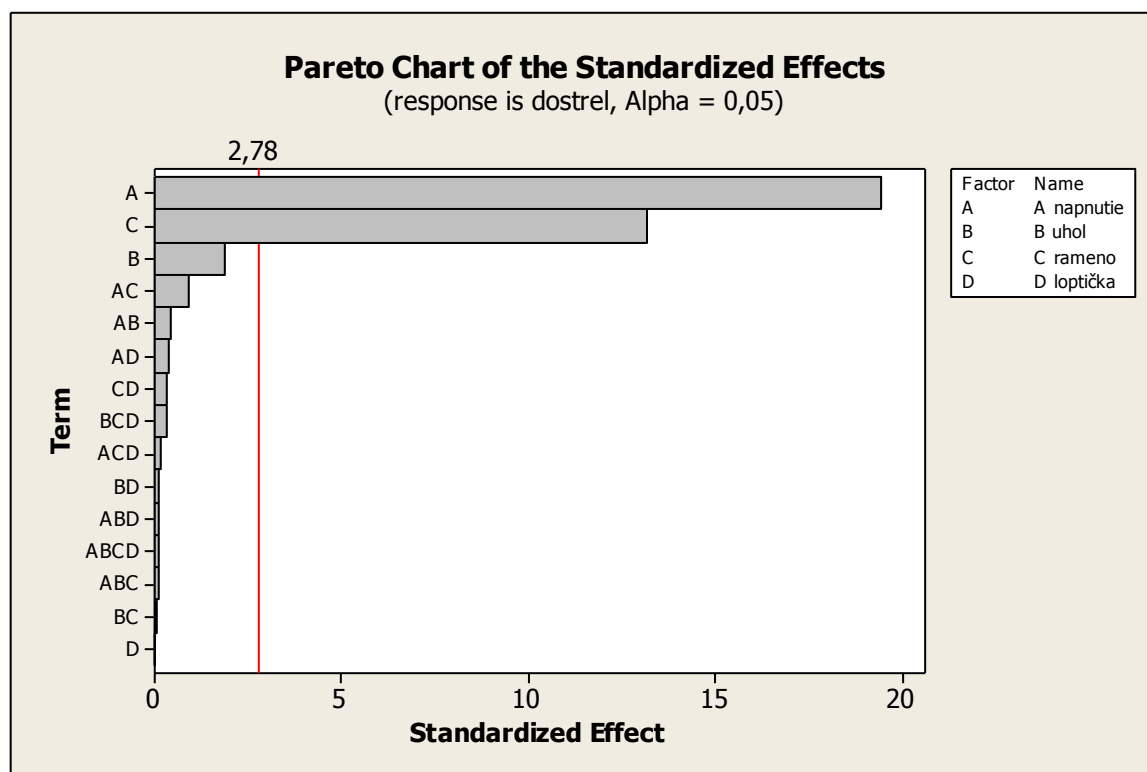


## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                           | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|--------------------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant                       |         | 227,20 | 3,940   | 57,66  | 0,000 |
| A napnutie                     | -171,12 | -85,56 | 4,405   | -19,42 | 0,000 |
| B uhol                         | 16,63   | 8,31   | 4,405   | 1,89   | 0,132 |
| C rameno                       | 116,13  | 58,06  | 4,405   | 13,18  | 0,000 |
| D loptička                     | 0,20    | 0,10   | 3,940   | 0,03   | 0,981 |
| A napnutie*B uhol              | -3,62   | -1,81  | 4,405   | -0,41  | 0,702 |
| A napnutie*C rameno            | -8,12   | -4,06  | 4,405   | -0,92  | 0,409 |
| A napnutie*D loptička          | -3,13   | -1,56  | 4,405   | -0,35  | 0,741 |
| B uhol*C rameno                | -0,37   | -0,19  | 4,405   | -0,04  | 0,968 |
| B uhol*D loptička              | 1,13    | 0,56   | 4,405   | 0,13   | 0,905 |
| C rameno*D loptička            | 2,62    | 1,31   | 4,405   | 0,30   | 0,781 |
| A napnutie*B uhol*C rameno     | 0,87    | 0,44   | 4,405   | 0,10   | 0,926 |
| A napnutie*B uhol*D loptička   | -1,12   | -0,56  | 4,405   | -0,13  | 0,905 |
| A napnutie*C rameno*D loptička | -1,62   | -0,81  | 4,405   | -0,18  | 0,863 |
| B uhol*C rameno*D loptička     | 2,62    | 1,31   | 4,405   | 0,30   | 0,781 |
| A napnutie*B uhol*C rameno*    | 0,88    | 0,44   | 4,405   | 0,10   | 0,926 |
| D loptička                     |         |        |         |        |       |

S = 17,6219 PRESS = 390233  
R-Sq = 99,29% R-Sq(pred) = 0,00% R-Sq(adj) = 96,61%



## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                   | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P            |
|------------------------|---------|--------|---------|--------|--------------|
| Constant               |         | 227,20 | 2,679   | 84,82  | 0,000        |
| A napnutie             | -171,12 | -85,56 | 2,995   | -28,57 | 0,000        |
| B uhol                 | 16,63   | 8,31   | 2,995   | 2,78   | 0,022        |
| C rameno               | 116,13  | 58,06  | 2,995   | 19,39  | 0,000        |
| D loptička             | 0,20    | 0,10   | 2,679   | 0,04   | 0,971        |
| A napnutie*B uhol      | -3,62   | -1,81  | 2,995   | -0,61  | 0,560        |
| A napnutie*C rameno    | -8,12   | -4,06  | 2,995   | -1,36  | 0,208        |
| A napnutie*D loptička  | -3,13   | -1,56  | 2,995   | -0,52  | 0,614        |
| <b>B uhol*C rameno</b> | -0,37   | -0,19  | 2,995   | -0,06  | <b>0,951</b> |
| B uhol*D loptička      | 1,13    | 0,56   | 2,995   | 0,19   | 0,855        |
| C rameno*D loptička    | 2,62    | 1,31   | 2,995   | 0,44   | 0,672        |

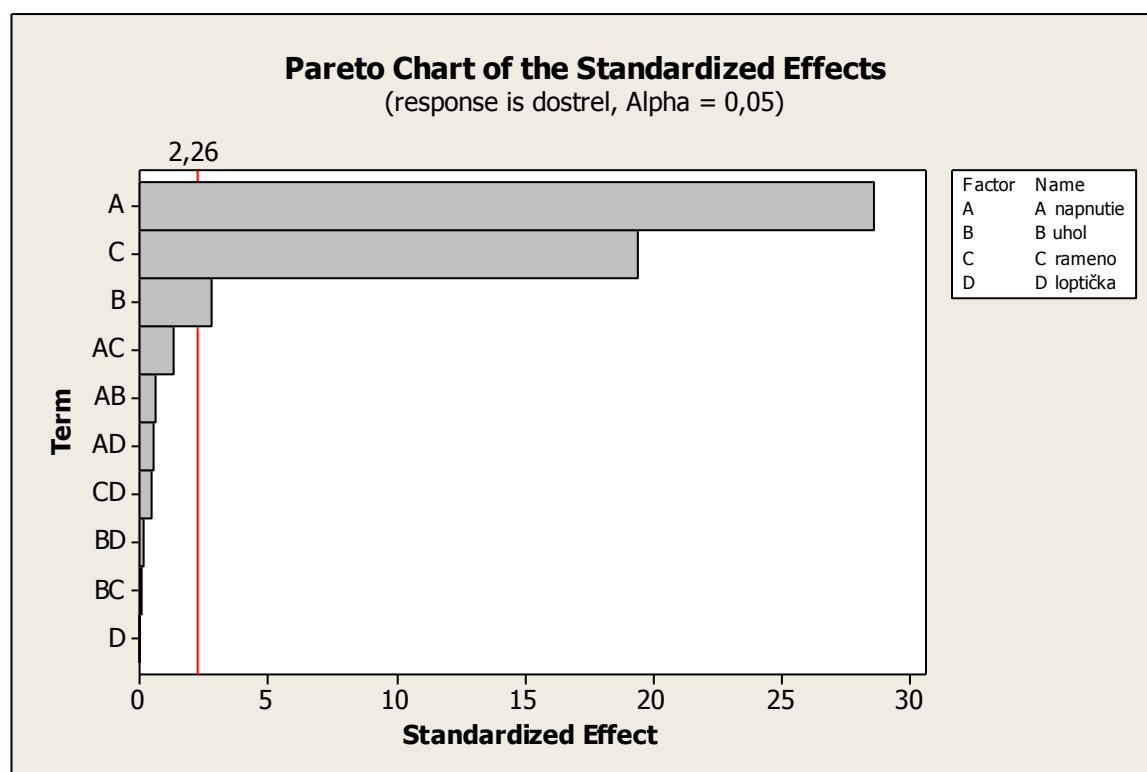
S = 11,9789

PRESS = 3800,69

R-Sq = 99,26%

R-Sq(pred) = 97,81%

R-Sq(adj) = 98,43%



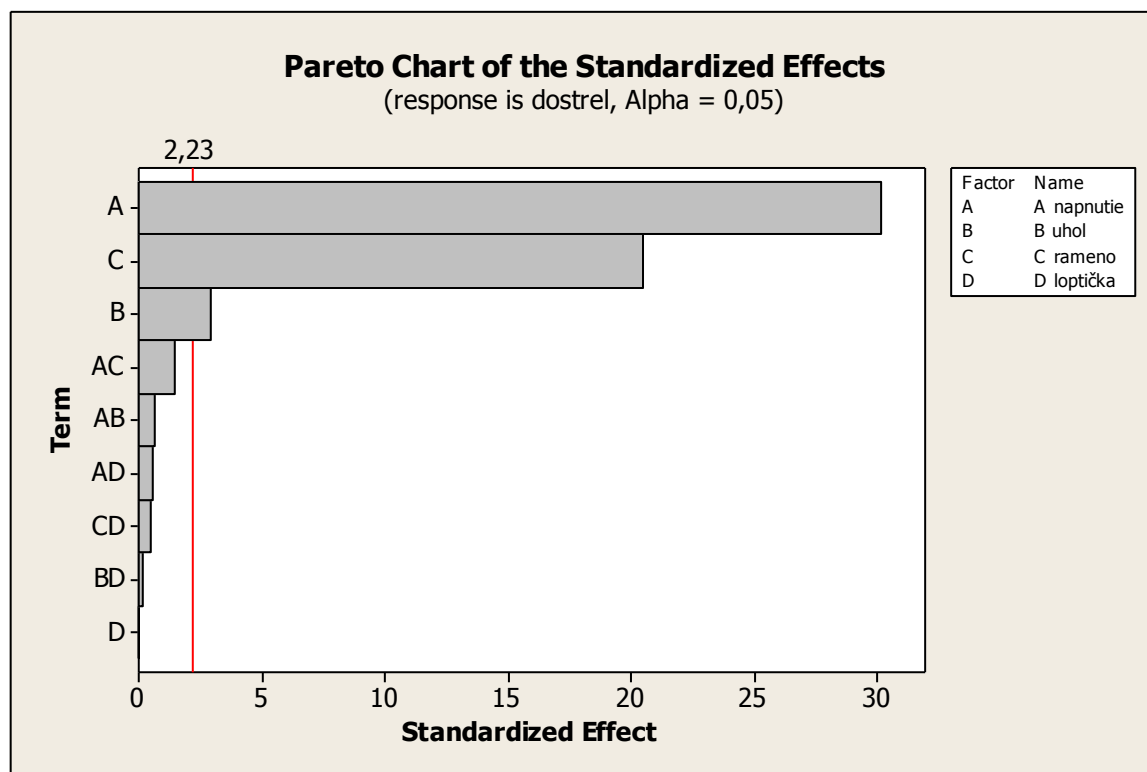
## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                  | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|-----------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant              |         | 227,20 | 2,542   | 89,39  | 0,000 |
| A napnutie            | -171,12 | -85,56 | 2,842   | -30,11 | 0,000 |
| B uhol                | 16,63   | 8,31   | 2,842   | 2,93   | 0,015 |
| C rameno              | 116,13  | 58,06  | 2,842   | 20,43  | 0,000 |
| D loptička            | 0,20    | 0,10   | 2,542   | 0,04   | 0,969 |
| A napnutie*B uhol     | -3,62   | -1,81  | 2,842   | -0,64  | 0,538 |
| A napnutie*C rameno   | -8,12   | -4,06  | 2,842   | -1,43  | 0,183 |
| A napnutie*D loptička | -3,13   | -1,56  | 2,842   | -0,55  | 0,594 |
| B uhol*D loptička     | 1,13    | 0,56   | 2,842   | 0,20   | 0,847 |
| C rameno*D loptička   | 2,62    | 1,31   | 2,842   | 0,46   | 0,654 |

S = 11,3666 PRESS = 3064,58

R-Sq = 99,26% R-Sq(pred) = 98,24% R-Sq(adj) = 98,59%

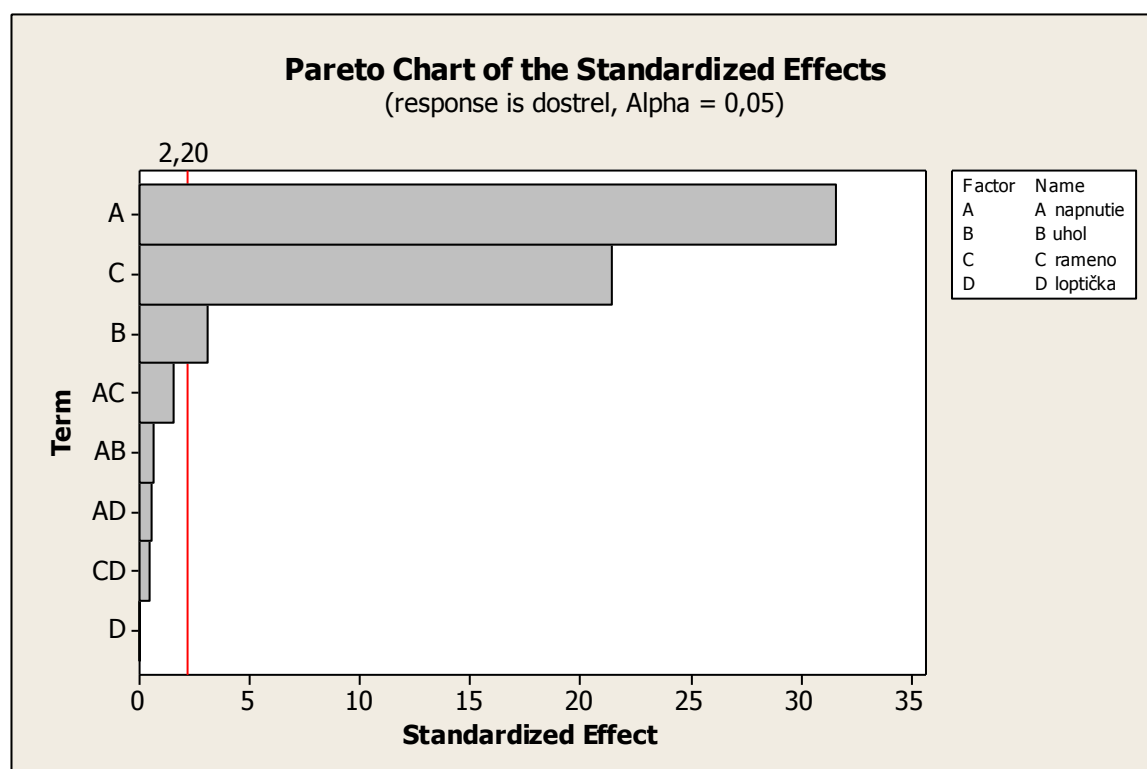


## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                  | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|-----------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant              |         | 227,20 | 2,428   | 93,57  | 0,000 |
| A napnutie            | -171,12 | -85,56 | 2,715   | -31,52 | 0,000 |
| B uhol                | 16,63   | 8,31   | 2,715   | 3,06   | 0,011 |
| C rameno              | 116,13  | 58,06  | 2,715   | 21,39  | 0,000 |
| D loptička            | 0,20    | 0,10   | 2,428   | 0,04   | 0,968 |
| A napnutie*B uhol     | -3,62   | -1,81  | 2,715   | -0,67  | 0,518 |
| A napnutie*C rameno   | -8,12   | -4,06  | 2,715   | -1,50  | 0,163 |
| A napnutie*D loptička | -3,13   | -1,56  | 2,715   | -0,58  | 0,576 |
| C rameno*D loptička   | 2,62    | 1,31   | 2,715   | 0,48   | 0,638 |

S = 10,8589      PRESS = 2626,76  
R-Sq = 99,25%      R-Sq(pred) = 98,49%      R-Sq(adj) = 98,71%

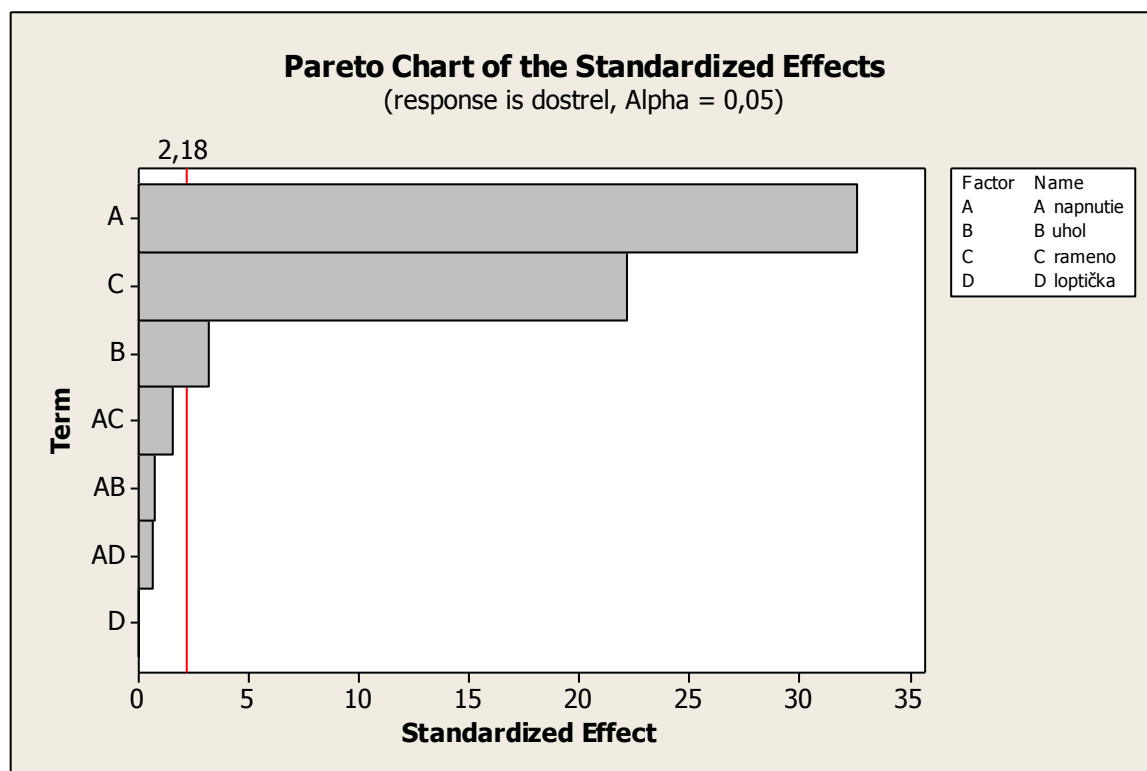


## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                  | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|-----------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant              |         | 227,20 | 2,349   | 96,71  | 0,000 |
| A napnutie            | -171,12 | -85,56 | 2,627   | -32,58 | 0,000 |
| B uhol                | 16,63   | 8,31   | 2,627   | 3,16   | 0,008 |
| C rameno              | 116,13  | 58,06  | 2,627   | 22,11  | 0,000 |
| D loptička            | 0,20    | 0,10   | 2,349   | 0,04   | 0,967 |
| A napnutie*B uhol     | -3,62   | -1,81  | 2,627   | -0,69  | 0,503 |
| A napnutie*C rameno   | -8,12   | -4,06  | 2,627   | -1,55  | 0,148 |
| A napnutie*D loptička | -3,13   | -1,56  | 2,627   | -0,59  | 0,563 |

S = 10,5064      PRESS = 2414,74  
R-Sq = 99,24%      R-Sq(pred) = 98,61%      R-Sq(adj) = 98,79%

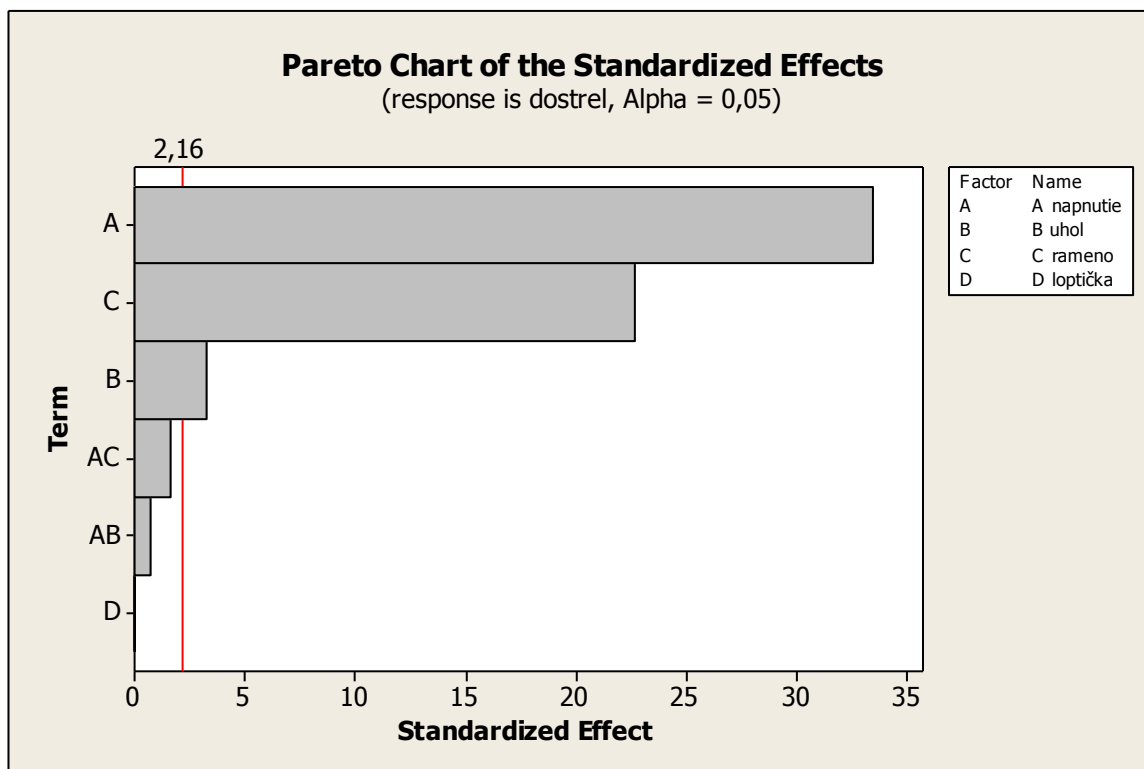


## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|---------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant            |         | 227,20 | 2,290   | 99,21  | 0,000 |
| A napnutie          | -171,12 | -85,56 | 2,561   | -33,42 | 0,000 |
| B uhol              | 16,63   | 8,31   | 2,561   | 3,25   | 0,006 |
| C rameno            | 116,13  | 58,06  | 2,561   | 22,68  | 0,000 |
| D loptička          | 0,20    | 0,10   | 2,290   | 0,04   | 0,966 |
| A napnutie*B uhol   | -3,62   | -1,81  | 2,561   | -0,71  | 0,492 |
| A napnutie*C rameno | -8,12   | -4,06  | 2,561   | -1,59  | 0,137 |

S = 10,2420      PRESS = 2289,92  
R-Sq = 99,22%      R-Sq(pred) = 98,68%      R-Sq(adj) = 98,85%



## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term                | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|---------------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant            |         | 227,20 | 2,249   | 101,02 | 0,000 |
| A napnutie          | -171,12 | -85,56 | 2,514   | -34,03 | 0,000 |
| B uhol              | 16,63   | 8,31   | 2,514   | 3,31   | 0,005 |
| C rameno            | 116,13  | 58,06  | 2,514   | 23,09  | 0,000 |
| D loptička          | 0,20    | 0,10   | 2,249   | 0,04   | 0,965 |
| A napnutie*C rameno | -8,12   | -4,06  | 2,514   | -1,62  | 0,128 |

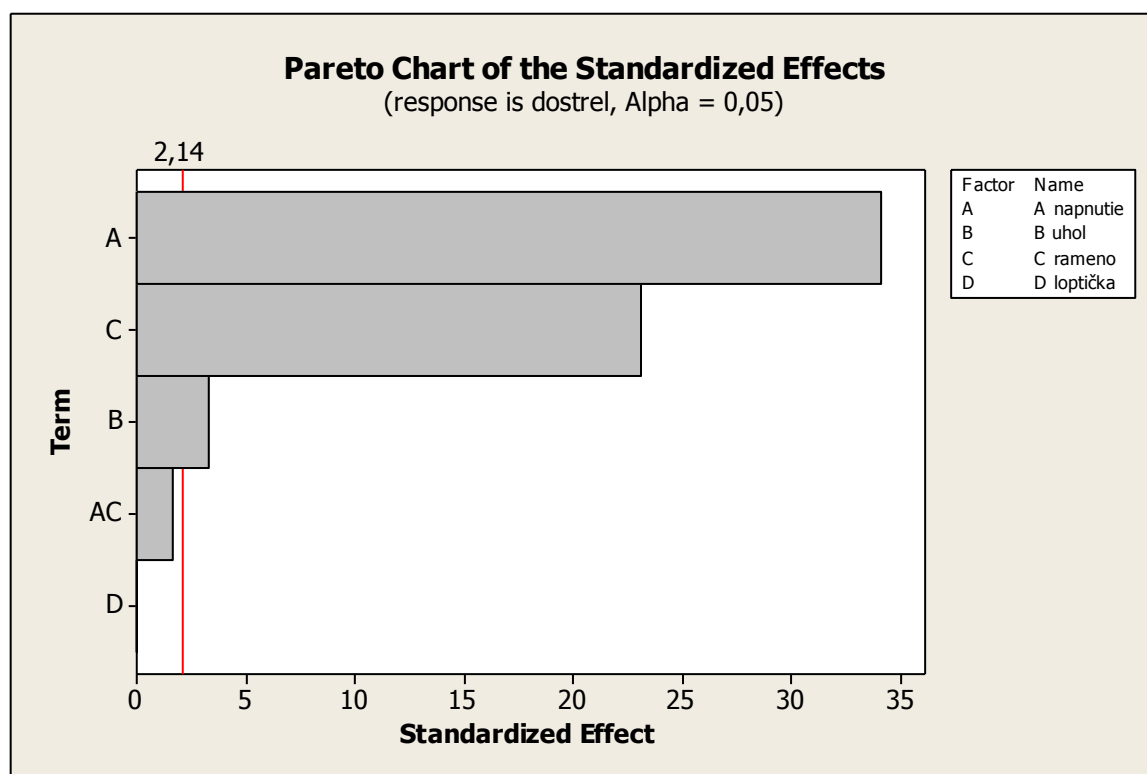
S = 10,0579

PRESS = 2220,91

R-Sq = 99,19%

R-Sq(pred) = 98,72%

R-Sq(adj) = 98,89%





## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno; D loptička

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term       | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant   |         | 227,20 | 2,367   | 96,00  | 0,000 |
| A napnutie | -171,12 | -85,56 | 2,646   | -32,34 | 0,000 |
| B uhol     | 16,63   | 8,31   | 2,646   | 3,14   | 0,007 |
| C rameno   | 116,13  | 58,06  | 2,646   | 21,94  | 0,000 |
| D loptička | 0,20    | 0,10   | 2,367   | 0,04   | 0,967 |

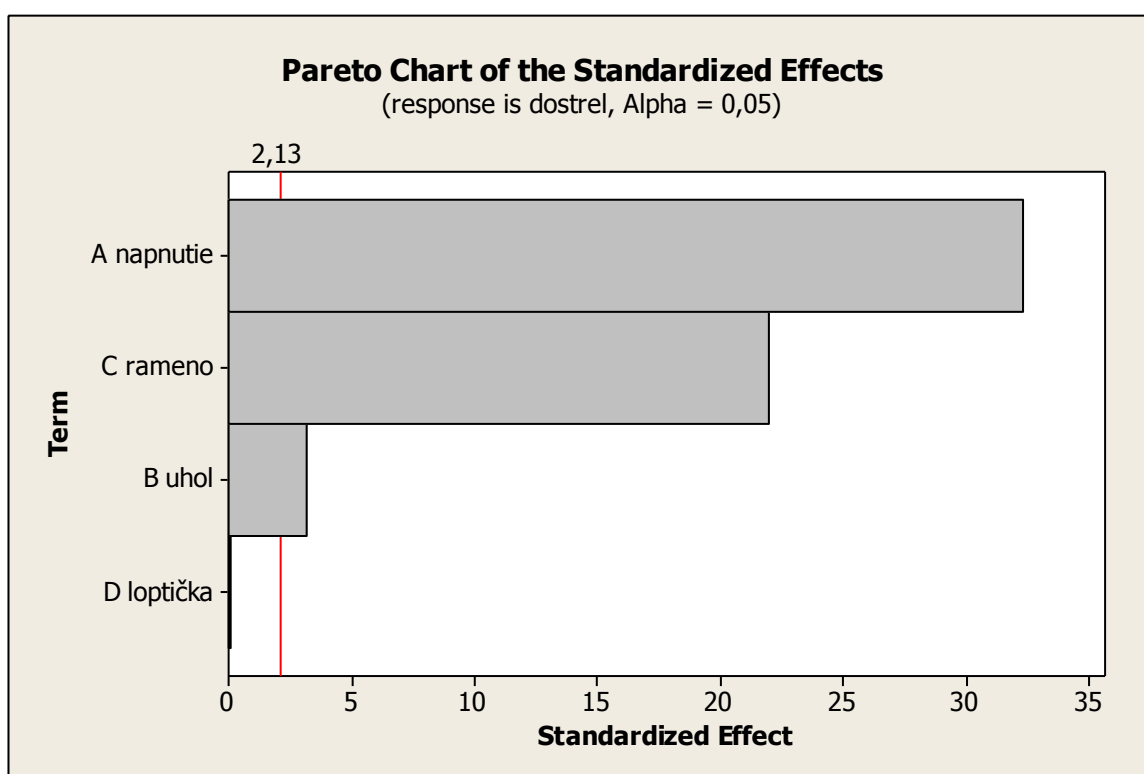
S = 10,5840

PRESS = 2575,41

R-Sq = 99,03%

R-Sq(pred) = 98,52%

R-Sq(adj) = 98,78%

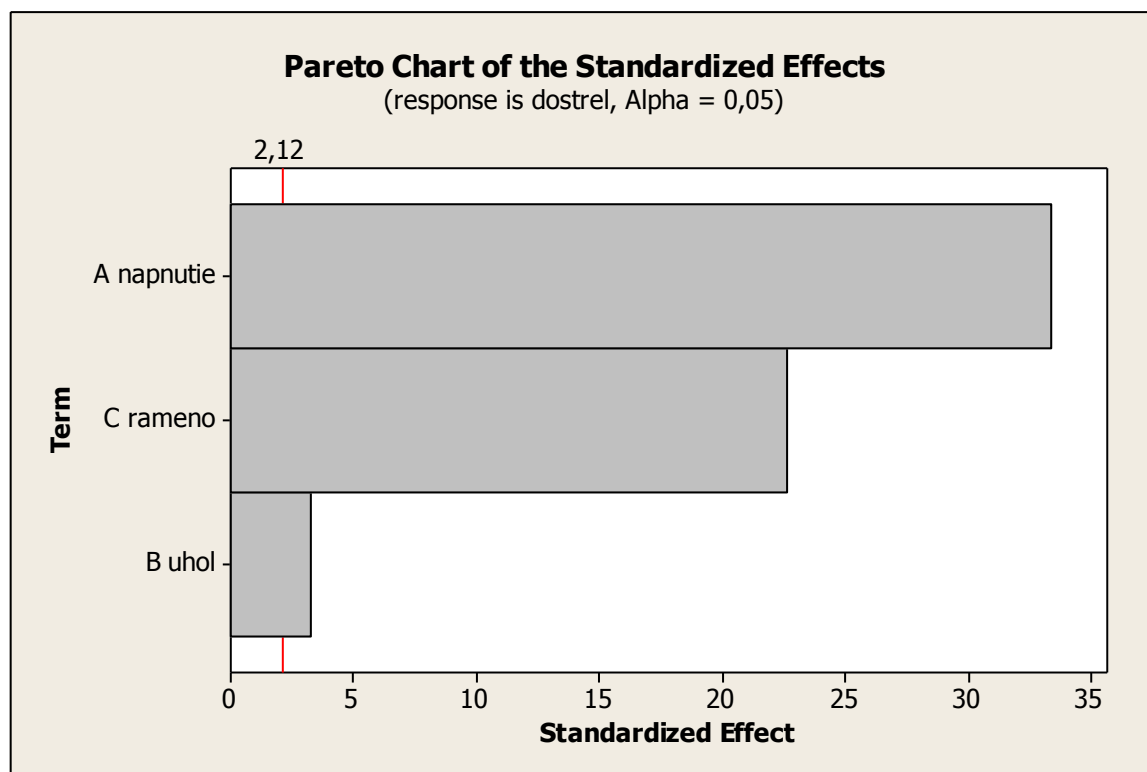


## Factorial Fit: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Effects and Coefficients for dostrel (coded units)

| Term       | Effect  | Coef   | SE Coef | T      | P     |
|------------|---------|--------|---------|--------|-------|
| Constant   |         | 227,20 | 2,292   | 99,14  | 0,000 |
| A napnutie | -171,12 | -85,56 | 2,562   | -33,40 | 0,000 |
| B uhol     | 16,63   | 8,31   | 2,562   | 3,24   | 0,005 |
| C rameno   | 116,13  | 58,06  | 2,562   | 22,66  | 0,000 |

S = 10,2485      PRESS = 2278,52  
R-Sq = 99,03%      R-Sq(pred) = 98,69%      R-Sq(adj) = 98,85%



## Príloha B

### Response Surface Regression: dostrel versus Block; A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                  | Coef    | SE Coef | T        | P     |
|-----------------------|---------|---------|----------|-------|
| Constant              | 241,879 | 1,1914  | 203,019  | 0,000 |
| Block                 | 1,270   | 0,8650  | 1,468    | 0,160 |
| A napnutie            | -85,722 | 0,7923  | -108,192 | 0,000 |
| B uhol                | 8,000   | 0,7923  | 10,097   | 0,000 |
| C rameno              | 57,944  | 0,7923  | 73,133   | 0,000 |
| A napnutie*A napnutie | 2,188   | 2,0346  | 1,075    | 0,297 |
| B uhol*B uhol         | -15,312 | 2,0346  | -7,526   | 0,000 |
| C rameno*C rameno     | -6,812  | 2,0346  | -3,348   | 0,004 |
| A napnutie*B uhol     | -1,813  | 0,8404  | -2,157   | 0,046 |
| A napnutie*C rameno   | -4,062  | 0,8404  | -4,834   | 0,000 |
| B uhol*C rameno       | -0,187  | 0,8404  | -0,223   | 0,826 |

S = 3,36151      PRESS = 530,686  
R-Sq = 99,90%    R-Sq(pred) = 99,73%    R-Sq(adj) = 99,84%

### Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                  | Coef    | SE Coef | T        | P     |
|-----------------------|---------|---------|----------|-------|
| Constant              | 241,416 | 1,1852  | 203,687  | 0,000 |
| A napnutie            | -85,722 | 0,8173  | -104,879 | 0,000 |
| B uhol                | 8,000   | 0,8173  | 9,788    | 0,000 |
| C rameno              | 57,944  | 0,8173  | 70,894   | 0,000 |
| A napnutie*A napnutie | 2,710   | 2,0665  | 1,312    | 0,206 |
| B uhol*B uhol         | -14,790 | 2,0665  | -7,157   | 0,000 |
| C rameno*C rameno     | -6,290  | 2,0665  | -3,044   | 0,007 |
| A napnutie*B uhol     | -1,812  | 0,8669  | -2,091   | 0,051 |
| A napnutie*C rameno   | -4,063  | 0,8669  | -4,686   | 0,000 |
| B uhol*C rameno       | -0,188  | 0,8669  | -0,216   | 0,831 |

S = 3,46769      PRESS = 569,131  
R-Sq = 99,89%    R-Sq(pred) = 99,71%    R-Sq(adj) = 99,83%

### Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                  | Coef    | SE Coef | T        | P     |
|-----------------------|---------|---------|----------|-------|
| Constant              | 241,416 | 1,1551  | 208,997  | 0,000 |
| A napnutie            | -85,722 | 0,7966  | -107,613 | 0,000 |
| B uhol                | 8,000   | 0,7966  | 10,043   | 0,000 |
| C rameno              | 57,944  | 0,7966  | 72,742   | 0,000 |
| A napnutie*A napnutie | 2,710   | 2,0140  | 1,346    | 0,194 |
| B uhol*B uhol         | -14,790 | 2,0140  | -7,343   | 0,000 |
| C rameno*C rameno     | -6,290  | 2,0140  | -3,123   | 0,006 |
| A napnutie*B uhol     | -1,812  | 0,8449  | -2,145   | 0,045 |
| A napnutie*C rameno   | -4,063  | 0,8449  | -4,808   | 0,000 |

S = 3,37958      PRESS = 503,452  
R-Sq = 99,89%    R-Sq(pred) = 99,74%    R-Sq(adj) = 99,84%

## Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                | Coef    | SE Coef | T        | P     |
|---------------------|---------|---------|----------|-------|
| Constant            | 241,737 | 1,1529  | 209,675  | 0,000 |
| A napnutie          | -85,722 | 0,8126  | -105,496 | 0,000 |
| B uhol              | 8,000   | 0,8126  | 9,845    | 0,000 |
| C rameno            | 57,944  | 0,8126  | 71,311   | 0,000 |
| B uhol*B uhol       | -13,684 | 1,8758  | -7,295   | 0,000 |
| C rameno*C rameno   | -5,184  | 1,8758  | -2,764   | 0,012 |
| A napnutie*B uhol   | -1,812  | 0,8619  | -2,103   | 0,048 |
| A napnutie*C rameno | -4,063  | 0,8619  | -4,714   | 0,000 |

S = 3,44742      PRESS = 511,724

R-Sq = 99,88%    R-Sq(pred) = 99,74%    R-Sq(adj) = 99,84%

# Príloha C

## Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                  | Coef    | SE Coef | T       | P     |
|-----------------------|---------|---------|---------|-------|
| Constant              | 240,833 | 2,271   | 106,031 | 0,000 |
| A napnutie            | -87,000 | 1,391   | -62,549 | 0,000 |
| B uhol                | 6,250   | 1,391   | 4,493   | 0,000 |
| C rameno              | 61,250  | 1,391   | 44,036  | 0,000 |
| A napnutie*A napnutie | -1,479  | 2,047   | -0,722  | 0,478 |
| B uhol*B uhol         | -15,979 | 2,047   | -7,805  | 0,000 |
| C rameno*C rameno     | -4,479  | 2,047   | -2,188  | 0,041 |
| A napnutie*B uhol     | -1,375  | 1,967   | -0,699  | 0,493 |
| A napnutie*C rameno   | -6,875  | 1,967   | -3,495  | 0,002 |
| B uhol*C rameno       | -2,375  | 1,967   | -1,207  | 0,241 |

S = 5,56365 PRESS = 1483,12  
R-Sq = 99,66% R-Sq(pred) = 99,20% R-Sq(adj) = 99,51%

## Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                  | Coef    | SE Coef | T       | P     |
|-----------------------|---------|---------|---------|-------|
| Constant              | 240,833 | 2,244   | 107,346 | 0,000 |
| A napnutie            | -87,000 | 1,374   | -63,325 | 0,000 |
| B uhol                | 6,250   | 1,374   | 4,549   | 0,000 |
| C rameno              | 61,250  | 1,374   | 44,582  | 0,000 |
| A napnutie*A napnutie | -1,479  | 2,022   | -0,731  | 0,473 |
| B uhol*B uhol         | -15,979 | 2,022   | -7,902  | 0,000 |
| C rameno*C rameno     | -4,479  | 2,022   | -2,215  | 0,038 |
| A napnutie*C rameno   | -6,875  | 1,943   | -3,538  | 0,002 |
| B uhol*C rameno       | -2,375  | 1,943   | -1,222  | 0,235 |

S = 5,49549 PRESS = 1421,03  
R-Sq = 99,66% R-Sq(pred) = 99,23% R-Sq(adj) = 99,53%

## Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                | Coef    | SE Coef | T       | P     |
|---------------------|---------|---------|---------|-------|
| Constant            | 239,923 | 1,847   | 129,906 | 0,000 |
| A napnutie          | -87,000 | 1,359   | -64,005 | 0,000 |
| B uhol              | 6,250   | 1,359   | 4,598   | 0,000 |
| C rameno            | 61,250  | 1,359   | 45,061  | 0,000 |
| B uhol*B uhol       | -15,865 | 1,995   | -7,953  | 0,000 |
| C rameno*C rameno   | -4,365  | 1,995   | -2,188  | 0,040 |
| A napnutie*C rameno | -6,875  | 1,922   | -3,576  | 0,002 |
| B uhol*C rameno     | -2,375  | 1,922   | -1,235  | 0,230 |

S = 5,43710 PRESS = 1328,03  
R-Sq = 99,65% R-Sq(pred) = 99,28% R-Sq(adj) = 99,54%

## Response Surface Regression: dostrel versus A napnutie; B uhol; C rameno

The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for dostrel

| Term                | Coef    | SE Coef | T       | P     |
|---------------------|---------|---------|---------|-------|
| Constant            | 239,923 | 1,868   | 128,445 | 0,000 |
| A napnutie          | -87,000 | 1,375   | -63,285 | 0,000 |
| B uhol              | 6,250   | 1,375   | 4,546   | 0,000 |
| C rameno            | 61,250  | 1,375   | 44,554  | 0,000 |
| B uhol*B uhol       | -15,865 | 2,018   | -7,864  | 0,000 |
| C rameno*C rameno   | -4,365  | 2,018   | -2,164  | 0,041 |
| A napnutie*C rameno | -6,875  | 1,944   | -3,536  | 0,002 |

S = 5,49897      PRESS = 1301,95

R-Sq = 99,62%    R-Sq(pred) = 99,30%    R-Sq(adj) = 99,53%

